

# Stufen der Zahlbegriffsentwicklung

© Johannes Hinkelammert

Ein einfaches Modell der Zahlbegriffsentwicklung zur qualitativen Diagnostizierung von Rechenschwierigkeiten in der Schule.

*Hinweise:*

*In der Zahlbegriffsentwicklung spielen die schriftlichen Verfahren der Subtraktion, Addition, Multiplikation und Division keine Rolle. Sie bilden ein eigenes Kapitel mit der Überschrift „Beherrschung der Algorithmen“*

## **1 Zahlen als Repräsentanten für einen Ort auf dem Zahlenstrahl.**

*Zahlenraum bis zehn und bis zwanzig*

*Ordinaler Zahlenraum*

Die Kinder lernen die Zahlen kennen. Sie lernen die Aussprache, die Symbole und die Reihenfolge der Zahlen kennen, dh. sie lernen zählen. Sie lernen das Zählen und weiterzählen zur Addition und Subtraktion zu nutzen.

## **2 Zahlen als Repräsentanten für Mengen**

*Zahlenraum bis zehn und bis zwanzig*

*kardinaler Zahlenraum*

Die Kinder erfassen strukturierte Mengen bis zehn (oder bis zwanzig) simultan und erfassen dabei auch die Zehnerergänzung ( als Vorbereitung für den Zehnerübergang). Sie nutzen dabei die Fünfer-Bündelung (Kraft der Fünf).

Sie addieren und subtrahieren im kardinalen Zahlenraum, d.h. sie fügen zwei Mengen zu einer neuen (gesamt) Menge zusammen und teilen eine Menge in zwei (gleiche oder ungleiche) Teilmengen. Dies wird auch nicht-zählendes Rechnen genannt und dient ebenfalls als Vorbereitung für den Zehnerübergang.

Besonderes Augenmerk wird auf die simultane Subtraktion gelegt, bei der die Differenz zweier Mengen das Ergebnis bildet (siehe Untersuchung von Fr. Dr. Stern).

## **3 Zahlen als Repräsentanten für die Anzahl der Bündelungseinheiten**

*Zahlenraum bis Hundert*

*Das Bündelungsprinzip (Meta-Ebene erster Ordnung)*

Mit Hilfe der Zehnerbündelung werden große Mengen (bis hundert) strukturiert und damit übersichtlich gemacht. Zahlen bis hundert werden simultan erfasst.

Das kleine eins-plus-eins wird auf den Hunderterraum übertragen, jedoch ohne Zehnerübergang. Es werden Aufgaben wie  $74+3$ , oder  $40+30$  gerechnet bei denen die Kenntnisse aus dem eins-plus-eins übertragen werden sollen (bei beiden genannten Ausgaben ist die Grundaufgabe  $4+3$  die den Kindern bereits bekannt ist).

### **3.1 Addition und Subtraktion in das Bündelungsprinzip integrieren (Zehnerübergang).**

*Zahlenraum bis zwanzig.*

*Technik: Schrittweises Rechnen.*

Addition: vom ersten Summanden wird die Zehnerergänzung ermittelt. Dann wird der Zehner mit diesem Betrag aufgefüllt. Dann wird die Zehn (bzw. der Zehner) um den verbleibenden Betrag erhöht.

Bsp:  $5+7$ ; wird gerechnet:  $5+5=10$ ,  $10+2=12$

Subtraktion: In einem ersten Schritt wird der Minuend um den Betrag der Einerstelle verringert. Dann wird der verbleibende Betrag des Subtrahenden vom Minuenden subtrahiert. Der verbleibende Betrag wird dann mit Hilfe der Zehnerergänzung ermittelt.

Bsp:  $15-7$ ; wird gerechnet:  $15-5=10$ ,  $10-2=8$

### **3.2 Addition und Subtraktion mit Bündelungseinheiten und Einern**

*Zahlenraum bis hundert*

*Die Techniken aus den beiden vorherigen Kapiteln werden kombiniert und angewendet.*

Zu ein- und zweistelligen Zahlen werden ein – und zweistellige Zahlen subtrahiert und addiert. Technik des Halbschriftlichen Rechnens: erst die Zehner, dann die Einer.

### **3.3 Die Bündelung der Bündelung**

*Zahlenraum über hundert (große Zahlen)*

*Das Bündelungsprinzip wird auf den gesamten Zahlenraum erweitert (Meta-Ebene zweiter Ordnung). Erst auf den Zahlenraum bis Tausend, dann auf den Zahlenraum bis 1 Million. Bei der Verschriftlichung von Zahlen wird das Stellenwertsystem verwendet.*

## **4 Zahlen als Repräsentanten für ein Vielfaches**

*Zahlenraum bis hundert*

*Operationale Zahlen.*

Viele gleich große Mengen werden effizient durch die Angabe der Mächtigkeit einer Menge und deren Häufigkeit angegeben. Neu ist die Verwendung von Zahlen zur Angabe der Häufigkeit gleich großer Mengen. Diese Zahlen werden operationale Zahlen genannt.

Werden gleich große Mengen zu einer Gesamtmenge vereint so nennt man das Multiplikation. Wird eine Menge in mehrere gleich große Teilmengen aufgeteilt, so wird das „Division“ genannt. (Die Verwendung des Begriffs in der Kombinatorik wird hier nicht berücksichtigt).

Eine Multiplikations- oder Divisionsaufgabe besteht immer aus einer operationalen und einer kardinalen Zahl. Beispiel:  $5 \times 2$ ; Die fünf ist die operationale Zahl, sie gibt die Häufigkeit an.

Die Zwei ist die Kardinalzahl, sie gibt die Mächtigkeit einer der fünf Teilmengen an.

Bei der Division gibt es zwei Aufgabentypen.

1. Gesucht wird die **Häufigkeit** der gleich großen Mengen in die die Gesamtmenge geteilt wurde: „Aufteilen“. Das Ergebnis ist eine operationale Zahl
2. Gesucht wird die **Mächtigkeit einer** Menge( von vielen) in die die Gesamtmenge geteilt wurde: „Verteilen“. Das Ergebnis ist eine kardinale Zahl