
Klaus Hasemann/Elsbeth Stern

Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben – Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres

Zusammenfassung: Aus der gegenwärtigen Diskussion um den Mathematikunterricht in der Grundschule ergibt sich u.a. die Frage, wie das mathematische Verständnis gerade der schwächeren Kinder gefördert werden kann. In neun Klassen eines 2. Schuljahres wurden mit dem Ziel der Förderung Trainingsprogramme zu Textaufgaben durchgeführt, und zwar in drei Klassen ein Programm mit alltagsnaher Handlungsorientierung und in drei Klassen ein Programm mit abstrakt-symbolischen Aktivitäten; des weiteren gab es drei Vergleichsklassen mit konventionellem Unterricht. Die Auswertung der Tests ergab, dass bei den schwächeren Kindern das alltagsnahe Programm eindeutig am wenigsten bewirkte, während bei den Kindern, die das abstrakte Programm durchlaufen haben, der größte Leistungszuwachs zu beobachten war.

Abstract: In the ongoing discussion about mathematics education in Primary Schools, one issue is how to improve weaker students' mathematical understanding. Two different training programmes for the solution of word problems were developed, each of which was tested in three classes of second graders; in addition, there were three control classes. One of the programmes focussed on students' real-life action-related behaviour, while the other programme is based on abstract and symbolic activities. Results indicate that students on lower levels of academic achievement profited most from the programme with abstract and symbolic activities, whereas the effects of the action-related programme were below even of those of the ordinary teaching methods used by teachers in the control classes.

1. Einführung

Die Schwierigkeiten von Kindern - insbesondere in der Grundschule - mit den so genannten Textaufgaben sind wohl bekannt. Bei Untersuchungen dazu wurde deutlich, dass man 14 Grundtypen solcher Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad unterscheiden kann (vgl. Stern, 1998, S. 89; eine Übersicht findet man z.B. auch bei Radatz u.a., 1996, S. 78ff). Auffällig ist vor allem, dass manche Aufgaben für jüngere Kinder schwierig sind, die uns Erwachsenen gar nicht so schwierig erscheinen - und umgekehrt. So sind Aufgaben zum Vergleich (z.B. „Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?“) die schwierigsten Grundtypen überhaupt, während die sprachlich und inhaltlich komplexer erscheinenden Austauschaufgaben (z.B. „Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?“) zwar nicht zu den ganz leichten Aufgaben zählen, aber doch deutlich leichter sind.

Daraus wird deutlich, dass der Schwierigkeitsgrad solcher Aufgaben vor allem davon abhängt, wie leicht oder schwer es ist, die in ihnen beschriebenen Situationen mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, oder, kognitionspsychologisch ausgedrückt: wie leicht oder schwer es ist, mit dem vorhandenen Wissen adäquate mentale Modelle zu konstruieren und diese mit symbolischen Darstellungen, also Rechnungen zu verknüpfen. Erst

(JMD 23 (2002) H. 3/4, S. 222–242)

durch die Verknüpfung mit mentalen Repräsentationen bekommen Rechnungen ihren Sinn, doch gerade diese Verknüpfung bereitet den Kindern in der Grundschule häufig Probleme (und sie dürfte auch noch in den höheren Klassen eine der zentralen Schwierigkeiten gerade der schwächeren Schülerinnen und Schüler in der Mathematik sein).

Damit ist aber auch klar, dass es zu kurz gegriffen wäre, Textaufgaben wie die oben genannten allein wegen ihrer Realitätsferne als nicht kindgemäß und damit irrelevant abzutun. Zum einen gibt es Erstklässler, die diese Aufgaben ohne weiteres lösen können, und zum anderen sind die in den Aufgaben enthaltenen mathematischen Beziehungen ohne Zweifel solche, die zum Curriculum der Grundschulmathematik gehören sollten, wenn man den Unterricht nicht auf Rechenübungen reduzieren will. Die Frage ist also weniger, wie realitätsnah oder -fern die Aufgaben sind, sondern vielmehr, ob und inwieweit gerade bei den schwächeren Kindern mathematisches Verständnis in dem oben genannten Sinne durch die Behandlung solcher Aufgaben gefördert wird.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen entwickelten wir in einer Interventionsstudie Trainingsprogramme zum Lösen von Textaufgaben im 2. Schuljahr, bei denen das Text-, Situations- und Operationsverständnis im Vordergrund standen, nicht aber das eigentliche Rechnen (obwohl auch dieses überprüft wurde). Die von uns entwickelten Trainingsprogramme waren darauf angelegt, die Verknüpfung von realer Situation, mentaler Repräsentation und symbolischer Darstellung in kindgemäßer Weise zum Thema des Unterrichts zu machen; unser Ziel war es zu prüfen, mit welcher Art von Übungen sich das Verstehen und Lösen von Textaufgaben im Grundschulalter am besten fördern lässt. Bei der Konzeption dieser Übungen bieten sich zwei unterschiedliche Perspektiven an.

1) Die Perspektive der alltagsnahen Handlungsorientierung

Dieser Ansatz basiert auf der Annahme, dass die Entwicklung vom Konkreten zum Abstrakten verläuft und dass abstrakte Konzepte aus Handlungen entstehen. Aus dieser Perspektive, die insbesondere in der Piagetianischen Tradition verankert ist, wird am gegenwärtigen Mathematikunterricht dessen Lebensferne kritisiert. Da die behandelten Aufgaben abseitige Probleme behandeln und in unrealistische Situationskontexte eingebunden sind, stehen sie der kindlichen Lebenswelt fern. Deshalb können Grundschüler die Lernangebote nicht optimal nutzen. Jean Lave (1988) diskutiert Untersuchungen, in denen gezeigt werden konnte, dass Erwachsene wie auch Kinder mathematische Probleme im Alltag anders lösen als sie dies in der Schule gelernt haben. Eindrucksvolle Ergebnisse der sogenannten Straßenmathematik von Carraher, Carraher und Schliemann (1993) belegen dies ebenfalls. Auch wenn, wie Franke (1998) bemerkt, diese Untersuchungen nur bedingt Rückschlüsse auf Unterricht und kindgemäßes Lernen zulassen, so kann aus diesen Ergebnissen doch die Forderung abgeleitet werden, den Mathematikunterricht alltagsnäher zu gestalten.

So stellen Radatz u.a. (1996, S. 5) bei der Formulierung der Prinzipien für den Mathematikunterricht in der Grundschule das Anknüpfen an die kindlichen Vorerfahrungen sowie die Forderung, Unterrichtsthemen „ganzheitlicher und in Sinnzusammenhängen“ anzugehen, in den Vordergrund. Mit Blick auf die Addition und Subtraktion bedeutet dies, dass die Kinder die Gelegenheit haben müssen, die in den Rechengeschichten

präsentierten Sachsituationen mit konkretem Material zu simulieren; die Systematisierung dieser Kenntnisse und die Übersetzung in die formale Gleichungsschreibweise betrachten sie als nachgeordnete Ziele (S. 77).

Gleichermaßen theoretisch fundiert wie praktisch erprobt sind die Vorschläge für einen „realistischen Mathematikunterricht“ des Utrechter Freudenthal-Instituts (vgl. u.a. Treffers und Goffree, 1985; Treffers, 1987; am Beispiel der Bruchrechnung: Streefland, 1988). Dieser Unterricht soll sowohl die horizontale (d.h. auf das Betrachten alltäglicher Probleme und deren Transformation in die Mathematik ausgerichtete) als auch die vertikale (d.h. auf Schematisierung und das Umgehen mit mathematischen Werkzeugen ausgerichtete) Mathematisierung fördern. Im Ablauf des Unterrichts steht jedoch an erster Stelle stets die Erkundung der realen Situationen; formale Elemente werden erst später und zunächst lokal, d.h. gebunden an den speziellen Fall und mit Bezug auf die konkrete Situation, in den Lernprozess eingeführt (Treffers, 1987, S. 248).

Mit der Konstruktion komplexer realistischer und alltagsrelevanter Szenarien, in denen mathematische Probleme eingebunden sind, könnten Kinder dazu motiviert werden, eigene mathematische Lösungsansätze zu konstruieren. Sie lernen dabei, dass ihnen Mathematik auch im Alltag helfen kann. Mit zunehmender Übung können konkrete Handlungen mental durchgeführt werden, daraus entstehen symbolisch-mathematische Aktivitäten.

2) Die Perspektive der abstrakt-symbolischen Aktivitäten

Diese Perspektive knüpft an Theorien an, in denen die Bedeutung von Symbolsystemen beim Denken betont wird (z.B. Wygotski, 1964). Im Laufe der kognitiven Entwicklung erhalten Symbole eine eigene, von der real existierenden Welt losgelöste Bedeutung (vgl. Staub und Stern, 1997). Mit Hilfe von Symbolsystemen können Situationen und Vorgänge modelliert werden, die entweder in der konkreten, physikalischen Welt nicht durchführbar sind oder sich zumindest der direkten Wahrnehmung entziehen.

Ein großer Teil der zur Bewältigung von Alltagsanforderungen benötigten Konzepte und Konstrukte ist das Ergebnis symbolischer Aktivität. Bei Stern (1998) wird ausführlich diskutiert, dass die Schwierigkeiten von Grundschulkindern mit Textaufgaben zum quantitativen Vergleich auf die Interpretationen von Zahlen als Kardinalzahlen zurückzuführen sind. Ziel des Grundschulunterrichtes sollte es deshalb sein, den Kindern beizubringen, dass Zahlen nicht nur zum Zählen genutzt werden können, sondern auch zur Modellierung von Beziehungen zwischen Mengen. Dies kann geschehen, indem Repräsentationsformen wie Plättchen, Perlenketten oder Zahlenstrahlen gewählt werden, in denen die Beziehungen zwischen den Mengen flexibel manipuliert werden können.

Aus dieser Perspektive ergibt sich die Forderung, dass Mathematik erst nach der Durchführung abstrakt-symbolischer Aktivitäten auf Alltagsprobleme angewendet werden sollte.

2. Die Interventionsstudie

In dieser Studie sollten Effekte eines Trainings der alltagsnahen Orientierung und eines Trainings der abstrakt-symbolischen Aktivitäten auf das Verstehen und Lösen von Textaufgaben miteinander verglichen werden. Beide Perspektiven lassen sich in den Unterricht integrieren. Für eine theoretisch fundierte Lern- und Instruktionsforschung ist es jedoch unabdingbar, die Effekte der Einbettung in alltägliche Kontexte von denen der abstrakt-symbolischen Aktivitäten zu trennen. Wenn man Trainingsprogramme in ihrer Gesamtheit evaluiert, können zentrale und periphere Wissens Elemente nicht getrennt werden. Es muss befürchtet werden, dass Lehrpersonen sich auf die ihnen „sympathischen“ Aspekte des Programms konzentrieren; sind dies nicht die zentralen Aspekte, bleibt das Trainingsprogramm unwirksam.

Auch unter dem Gesichtspunkt eventueller Aptitude-Treatment-Interaktionen ist es wichtig, die Wirkung einzelner Wissens Elemente getrennt zu erfassen. So sollte man herausfinden, welche Schüler von einer Einbettung in alltägliche Kontexte profitieren und welche Kinder Fortschritte machen, wenn sie zuvor abstrakt-symbolische Aktivitäten durchgeführt haben. Auf den ersten Blick klingt es plausibel, dass schwächere Schüler größere Lernfortschritte bei der Alltagseinbettung machen, während leistungsstärkere Kinder durch abstrakt-symbolische Aktivitäten zu höheren Leistungen motiviert werden. Nicht auszuschließen sind aber auch genau umgekehrte Effekte: Danach könnten schwächere Kinder durch ein abstrakt-symbolisches Training Defizite ausgleichen, während leistungsstärkere Schüler durch die Einbettung in alltägliche Kontexte möglicherweise ihren Horizont erweitern. Die Studie sollte damit dazu beitragen, die folgenden Fragen zu beantworten:

- 1) Effekte der Trainingsprogramme: Unterscheiden sich Klassen, die das abstrakt-symbolische Trainingsprogramm durchlaufen haben, in ihrer Leistung von Klassen, denen das alltagsorientierte Programm angeboten wurde? Erwartet wird, dass das abstrakt-symbolische Training sich insbesondere auf Aufgaben mit anspruchsvollen Situationsmodellen auswirkt.
- 2) Inwieweit haben die individuellen Eingangsvoraussetzungen der Kinder Einfluss auf den Erfolg eines Trainingsprogramms?

2.1. Beteiligte Schülerinnen und Schüler

Für die Untersuchung wurden neun Klassen des zweiten Schuljahres aus drei Schulen in Hannover ausgewählt. Die Einzugsbereiche dieser drei Schulen sind sehr unterschiedlich, zu erkennen ist dies insbesondere an den Unterschieden im Anteil von Schülerinnen und Schülern ausländischer Herkunft in den Klassen. In allen Klassen wurde zunächst ein Vortest und abschließend ein Nachtest durchgeführt (vgl. unten) sowie in je einer Klasse dieser drei Schulen das abstrakt-symbolische bzw. das alltagsorientierte Programm; außerdem gab es drei Vergleichsklassen, in denen die jeweilige Mathematiklehrerin den Unterricht so durchführte, wie sie es für richtig hielt, allerdings unter Verwendung von 12 Textaufgaben, die wir vorgegeben hatten und die in allen Klassen behandelt wurden. Der in den drei Vergleichsklassen zu erwartende Lernerfolg stellte die beiden Trainingsprogramme in besonderer Weise auf den Prüfstand, denn dadurch konnten die spezifischen Verbesserungen der beiden Programme abgeschätzt und unterschieden werden von unspezifischen Übungseffekten. Insgesamt haben 175 Kinder (86

Jungen und 89 Mädchen) jeweils am Vor- und Nachtest teilgenommen, davon 59 (30/29) im alltagsnahen und 63 (32/31) im abstrakt-symbolischen Trainingsprogramm sowie 53 (24/29) in den Vergleichsklassen.

Die Vortests wurden in den neun Klassen in der Zeit vom 18. bis 25.4.01 eingesetzt, die Trainingsprogramme in den sechs Versuchsklassen bzw. der Unterricht in den drei Vergleichsklassen vom 9.5. bis 15.6.01 und die Nachtests vom 19. bis 22.6.01. Die Tests (Vor- und Nachtest sind identisch) wurden in jeweils einer Unterrichtsstunde vom Versuchsleiter oder einer Projektmitarbeiterin im Beisein der Klassenlehrerin durchgeführt, wobei der Testablauf und insbesondere der Zeitrahmen für die einzelnen Teilaufgaben präzise vorgegeben waren. Um das Abschreiben zu verhindern liegt der Test in einer A- und einer B-Version vor, allerdings unterscheiden sich die Versionen nur in der Reihenfolge der Aufgaben. Auf die Testaufgaben wird unten genauer eingegangen.

2.2. Die Durchführung der Untersuchung und die beteiligte Lehrerinnen und Lehrer

Sowohl der Unterricht im abstrakt-symbolischen als auch der im alltagsnahen Trainingsprogramm wurde von Projektmitarbeiterinnen, der Unterricht in den Vergleichsklassen von den jeweiligen Mathematiklehrerinnen durchgeführt. Durch die Maßnahme sollte zum einen sichergestellt werden, dass der Unterricht in den sechs Versuchsklassen möglichst präzise gemäß den Intentionen der beiden Trainingsprogramme durchgeführt wurde, während die Lehrerinnen bei den drei Vergleichsklassen den Unterricht ihren Vorstellungen entsprechend gestalten sollten. Alle Lehrerinnen waren gebeten, die zwölf vorher ausgewählten Textaufgaben (vgl. unten) auf jeden Fall im Verlauf des Unterrichts zu behandeln. Es war nicht möglich, alle Unterrichtsstunden zu filmen, doch hospitierten Versuchsleiter und Projektmitarbeiter/innen regelmäßig in den Unterrichtsstunden, wenn auch nicht in allen.

Die beiden Lehrerinnen, die die Trainingsprogramme in den sechs Versuchsklassen durchführten, waren Projektmitarbeiterinnen mit größerer Unterrichtserfahrung; der Unterricht wurde von ihnen in Zusammenarbeit mit den Versuchsleitern in gemeinsamer Arbeit geplant. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten und um die Auswirkungen individueller Präferenzen so gering wie möglich zu halten, unterrichteten beide Lehrerinnen in beiden Trainingsprogrammen, also sowohl gemäß dem abstrakt-symbolischen als auch dem alltagsnahen Programm.

2.3. Die Inhalte der Vor- und des Nachtests

Vor- und Nachtest waren identisch, sie bestanden aus drei Teilen, im ersten Teil aus einem Speedtest mit 20 einfachen Rechenaufgaben (Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20), für die nur eine Minute zur Verfügung stand (die Kinder wurden selbstverständlich entsprechend instruiert, auch darüber, dass die Aufgaben in der Zeit für sie kaum zu schaffen waren). Beispiele:

$$19 - 7 = \square$$

$$13 - 7 = \square$$

$$15 - 8 = \square$$

$$9 + 3 = \square$$

$$4 + 8 = \square$$

$$7 + 6 = \square$$

$12 - 6 = \square$

$8 + 7 = \square$

$11 - 9 = \square$

$4 + 9 = \square$

Die Zahlen in diesen - wie auch in den folgenden - Aufgaben waren bewusst so gewählt, dass die Rechnungen für Kinder am Ende des 2. Schuljahres kein Problem sein sollten, denn überprüft wurde im Vor- und Nachtest weniger die Rechenfertigkeit als vielmehr das Text-, Situations- und Operationsverständnis der Kinder. Hierzu dienten insbesondere vier Seiten mit je vier Textaufgaben, für deren Bearbeitung standen jeweils vier Minuten zur Verfügung. Eine Beispielseite (verkleinert):

Maria hat 5 Murmeln.

Hans hat 8 Murmeln.

Wie viele Murmeln muss Maria noch bekommen,
damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?

Rechnung: _____

Uli hat 4 Bälle.

Er hat 3 Bälle weniger als Britta.

Wie viele Bälle hat Britta?

Rechnung: _____

Hans und Beate haben zusammen 6 Äpfel.

Hans hat 2 Äpfel.

Klaus und Inge haben zusammen 9 Äpfel.

Klaus hat 5 Äpfel.

Wie viele Äpfel haben Beate und Inge zusammen?

Rechnung: _____

Erik hat 5 Äpfel.

Thomas hat 2 Äpfel weniger als Erik.

Wie viele Äpfel haben die beiden zusammen?

Rechnung: _____

Den Abschluss bildeten wieder Rechenaufgaben, diesmal als Powertest angelegt, d.h. mit 11 Aufgaben, die wegen ihrer Struktur für die Kinder ziemlich schwierig waren; auch bei diesen Aufgaben stand den Kindern mit vier Minuten reichlich Zeit zur Verfügung. Beispiele:

$$\square - 3 - 2 = 1$$

$$19 - \square = 7$$

$$8 + \square = 12$$

$$4 + \square - 2 = 10$$

2.4. Die Trainingsprogramme

2.4.1 Die Auswahl der Aufgaben

In allen neun Klassen wurden die gleichen zwölf Textaufgaben eingesetzt; diese Maßnahme sollte nicht nur sicherstellen, dass auch in den Vergleichsklassen Übungen zur Lösung von Aufgaben dieser Art durchgeführt wurden, sondern dass diese Übungen auch zielgerichtet waren im Hinblick auf die spezifischen Schwierigkeiten der Kinder mit diesen Aufgaben.

Es hat bereits seit den achtziger Jahren sowohl in Deutschland als auch in den U.S.A. eine Reihe empirischer Untersuchungen gegeben, in denen Grundtypen von Textaufgaben unterschieden und deren Schwierigkeitsgrad ermittelt wurde. Einfache Textaufgaben zur Addition und Subtraktion können auf drei Situationsmodellen beruhen: dem Austausch (Change, CH), der Kombination (Combine, CB) und dem Vergleich (Compare, CP) von Mengen. Innerhalb der Situationsmodelle können, je nachdem, welche Menge unbekannt ist, 12 unterschiedliche Aufgabentypen kreiert werden, die bei Stern (1998, S. 89) zusammen mit Ergebnissen zur Schwierigkeit der einzelnen Aufgaben präsentiert werden. Zu den konsistenten Befunden gehören die besondere Schwierigkeiten der Kinder beim Lösen von Vergleichsaufgaben (vgl. Radatz u.a., 1996, S. 80). Diese lassen sich nach Stern und Lehrndorfer (1992) sowie Stern (1993) mit deren höheren Anforderungen an das mathematische Verständnis erklären. Um den quantitativen Vergleich zu verstehen, ist die Einsicht erforderlich, dass Zahlen nicht nur als Kardinalzahlen aufgefasst, sondern auch zur Modellierung von Beziehungen zwischen Mengen herangezogen werden können. In dieser Funktion kennzeichnen Zahlen nicht konkrete Mengen, sondern Relationen zwischen Mengen. Kinder, die sich beim Hören einer bestimmten Zahl sofort eine konkrete Menge von Gegenständen vorstellen, belasten ihren Arbeitsspeicher mit unnötiger Information und behindern sich damit beim Lösen von Vergleichsaufgaben.

Für die Intervention wurden Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ausgewählt. Neben einstufigen Aufgaben, die die Verrechnung zweier Zahlen erfordern, wurden auch komplexere Aufgaben ausgewählt, für deren Lösung mehr als eine Rechenoperation erforderlich ist. Für unsere Zwecke war sicherzustellen, dass der Kontext zum einen altersgemäß war, er es aber zum anderen nicht zuließ, dass sich die Kinder ausschließlich auf eigene Erfahrungen aus ihrem Alltag verlassen - oder gar zurückziehen - konnten, da das Ziel die Verbesserung ihres *mathematischen Verständnisses* war und nicht (nur) die Erhöhung der pragmatischen Fertigkeiten beim Lösen solcher Aufgaben; außerdem musste die Verwendung von Zahlen aus dem Zahlenraum bis 100 möglich sein.

In der holländischen Didaktik ist ein „Bus“-Kontext (vgl. unten) entwickelt worden, der die Konstruktion vieler, mathematisch unterschiedlich anspruchsvoller Aufgaben ermöglicht. Wir haben auf diesen Kontext ebenso zugegriffen wie auf den „Murmeln“-

Kontext, der in den Untersuchungen zu den Grundtypen von Textaufgaben häufig verwendet wird (vgl. die beiden Beispiele am Beginn der Einführung), dabei aber die „Murmeln“ durch „Pokémon-Karten“ ersetzt. Hinzu kommt noch ein weiterer Kontext („Stundenplan“), der in einigen Aufgaben das Operieren mit nur vorgestellten Quantitäten oder Beziehungen zwischen ihnen erfordert. Verwendet wurden in allen neun Klassen die folgenden Aufgaben in der angegebenen Reihenfolge:

1. (CP 1) Die Klasse 2a macht einen Ausflug. Die Kinder fahren mit einem roten und einem grünen Kleinbus. Im roten Bus sitzen 12 Kinder. Im grünen Bus sitzen 7 Kinder. Wie viele Kinder sitzen im roten Bus mehr als im grünen Bus?
2. (CP 3) Im roten Bus sitzen 8 Kinder. Im grünen Bus sitzen 5 Kinder mehr als im roten Bus. Wie viele Kinder sitzen im grünen Bus?
3. (komplex) Im roten Bus sitzen 13 Kinder. Im grünen Bus sitzen 6 Kinder weniger als im roten Bus. Wie viele Kinder sitzen in beiden Bussen zusammen?
4. (CP 1) Tom hat 27 Pokémon-Karten. Sarah hat 33 Pokémon-Karten. Wie viele Karten hat Sarah mehr als Tom?
5. (CB 2) Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt. Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?
6. (CP 1) Katrin hat 17 Stunden in der Woche. Ihr älterer Bruder Lars hat 22 Stunden in der Woche. Wie viele Stunden hat Lars mehr als Katrin?
7. (CP 5) Im zweiten Halbjahr hat Lars 21 Stunden. Er hat 4 Stunden mehr als Katrin. Wie viele Stunden hat Katrin?
8. (CH 3) Der Schulbus fährt zur Haltestelle. Im Bus sitzen 8 Kinder. Es steigen einige Kinder ein. Nach der Haltestelle sitzen 15 Kinder im Bus. Wie viele Kinder sind eingestiegen?
9. (CH 6) David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten. Wie viele Karten hatte er vorher?
10. (komplex) Claudia hat 24 Stunden in der Woche. Sie hat 6 Stunden mehr als Thomas. Oliver hat 5 Stunden mehr als Thomas. Wie viele Stunden hat Oliver?
11. (CP 6) Lisa hat 29 Karten. Astrid hat 11 Karten weniger als Lisa. Wie viele Karten hat Astrid?
12. (komplex) Jana hat 33 Pokémon-Karten. Sie hat 17 Karten mehr als Thomas. Wie viele Karten haben beide zusammen?

Für die Durchführung der Programme in den sechs Versuchs- und drei Vergleichsklassen war ein Zeitraum von etwa sechs Wochen vorgesehen, in dem die genannten zwölf Aufgaben eingesetzt werden sollten. Für die Behandlung dieser Aufgaben und des zugehörigen Trainingsprogramms konnten aber nicht alle in dieser Zeit anfallenden etwa 24 Unterrichtsstunden verwendet werden; wie im Folgenden teilweise beschrieben, wurden pro Klasse nur 11 bis 12 Stunden geplant und durchgeführt. Es soll an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass Textaufgaben in allen neun Klassen bereits früher Thema des Unterrichts gewesen waren.

2.4.2 Das alltagsnahe Trainingsprogramm

Eine Möglichkeit, Textaufgaben alltagsnah zu gestalten, bietet ein in der niederländischen Didaktik entwickeltes Phasenmodell (van den Brink, 1989). Es wird, bei entsprechenden Aufgaben, beispielsweise zunächst „Bus“ gespielt: Ein Bus fährt zur Haltestelle, es steigen Kinder ein oder aus, oder es werden zwei Busse betrachtet, in denen unterschiedlich viele Kinder sitzen; dieser spielerische Kontext enthält viele sinnvolle mathematische Probleme. Im nächsten Schritt werden die Bussituationen in Bildern anschaulich dargestellt. Anfangs sind die Insassen als Personen abgebildet, später wird deren Anzahl durch eine Zahl auf dem Bus gekennzeichnet. Die Haltestelle wird durch einen Pfeil ersetzt, und die Kinder können die Pfeilsprache zur Darstellung und Lösung der Aufgaben verwenden. Schließlich werden auch die Operationszeichen $+$ und $-$ verwendet, jedoch wird beim Rechnen immer wieder auf den Kontext der ein- und aussteigenden Kinder verwiesen. Dieser Kontext soll bewirken, dass bei späteren Additions- und Subtraktionsaufgaben auf eigene Erfahrungen zurückgegriffen werden kann. Erst wenn in diesen Phasen ausführliche Erfahrungen gesammelt wurden und außerdem das handelnde Rechnen mit Hilfe von Material, dem Zahlenstrahl usw. gefestigt ist, wird auf der symbolischen Ebene gerechnet.

Für das alltagsnahe Trainingsprogramm haben wir auf einige dieser Vorschläge zurückgegriffen (ohne dass jedoch von einem „realistischen Mathematikunterricht“ im Sinne von Treffers, 1987, die Rede sein könnte). Wie erwähnt, handelte es sich bei diesem Unterricht nicht um die Einführung eines neuen Sachverhaltes, sondern um das Training bestimmter Typen von Textaufgaben, allerdings von Aufgaben, die größtenteils nicht mit den üblichen Routinen gelöst werden konnten.

Der Verlauf des Unterrichts im alltagsnahen Trainingsprogramm kann hier nur durch die überblicksartige Beschreibung einiger markanter Stellen angedeutet werden. In den ersten drei Unterrichtsstunden wurde je eine der drei ersten Busaufgaben behandelt (Aufgaben Nr. 1, 2 und 3). Die jeweiligen Vergleichssituationen können sehr gut „gespielt“ werden, indem Kinder die Businsassen darstellen und auf diese Weise die Antworten auf die Fragen aus ihren Handlungen direkt ermitteln. Die ersten Unterrichtsstunden hatten allerdings auch schon das Ziel, den Kindern bei dem schwierigen Prozess der Transformation von konkreten Handlungen in Denkhandlungen und damit in mentale Repräsentationen dieser Situationen zu helfen. Zur Förderung dieses Prozesses wurden in unserem Programm „Zeichnungen“ und „Skizzen“ eingesetzt: Unter „Zeichnungen“ verstehen wir unmittelbare Wiedergaben der Situationen mit den technischen Mitteln der Kinder, „Skizzen“ dagegen sollen die *mathematischen Zusammenhänge* in den Situatio-

nen, z.B. die relevanten Mengen oder Zahlen und deren Beziehungen, kennzeichnen. Selbstverständlich hatte alle Kinder zunächst Probleme zu erfassen, was mit „Skizzen“ gemeint war.

Eine Skizze zu der Aufgabe 2:

Im roten Bus sitzen 8 Kinder. Im grünen Bus sitzen 5 Kinder mehr als im roten Bus.
Wie viele Kinder sitzen im grünen Bus?

kann z.B. wie folgt aussehen:



In den folgenden Stunden zeichnete die Lehrerin unter anderem ähnliche Skizzen an die Tafel und fragte nach dazu passenden Rechenaufgaben, die von den Kindern genannt wurden im Hinblick auf die Frage, ob bzw. warum sie passten, diskutiert. Die vierte Aufgabe

Tom hat 27 Pokémon-Karten. Sarah hat 33 Pokémon-Karten.
Wie viele Karten hat Sarah mehr als Tom?

wurde mit Karten im Sitzkreis durchgespielt, anschließend sammelte die Lehrerin dazu passende Rechenaufgaben. Von den Kindern genannt wurden $33 - 27 = \square$, $27 + \square = 33$ und $33 - \square = 27$.

Eine Beobachtung aus der 5. Stunde bei der Behandlung der Aufgabe

Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt.
Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?

zeigte jedoch, wie schwer es manchen Kindern fällt, sich von der realen Situation zu lösen: Ein Schüler hatte 34 Karten auf den Tisch gelegt, eine Mitschülerin sollte eine mögliche Verteilung dieser 34 Karten auf zwei Kinder vornehmen und griff (zufällig) 20 Karten für „Thorsten“ (und damit 14 für „Moritz“). Während der gesamten Unterrichtszeit, in der die Lehrerin mit der Klasse mögliche Vorgehensweisen zur Lösung der Aufgabe behandelte, bestand diese Schülerin darauf, dass „Thorsten“ 20 (eben genau die von ihr ausgewählten) Karten gesammelt hatte, die Aufgabe selbst und ihre Anforderungen traten gegenüber dieser eigenen Handlungserfahrung völlig in den Hintergrund, und auch noch nach der Unterrichtsstunde zeichnete sie ein (durchaus gelungenes) Bild von „Thorsten“ und seinen 20 Karten an die Tafel.

Im Anschluss an die Behandlung der 9. Aufgabe

David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten.
Wie viele Karten hatte er vorher?

wurden die Schülerinnen und Schüler in zwei der drei beteiligten Klassen aufgefordert, selbst Rechengeschichten zu erfinden, die die gleiche Struktur haben wie diese Aufgabe. Es zeigte sich, dass die meisten Kinder zwar in der Lage waren, sinnvolle Geschichten zu erfinden, aber nur 10 von 43 solcher Geschichten hatten die gleiche oder eine vergleichbare Struktur wie die in Aufgabe 9 (vgl. z.B. Abb. 1). Dieses Beispiel in Abb. 1 ist insofern besonders erfreulich als es zeigt, dass der Unterricht in diesem alltagsnahen Trainingsprogramm durchaus auch Kinder mit sprachlichen Defiziten in die Lage versetzt hat, den mathematischen Kern einer Aufgabe präzise in eine völlig andere Situation zu übertragen. Allerdings überwogen Lösungen wie die in Abb. 2.

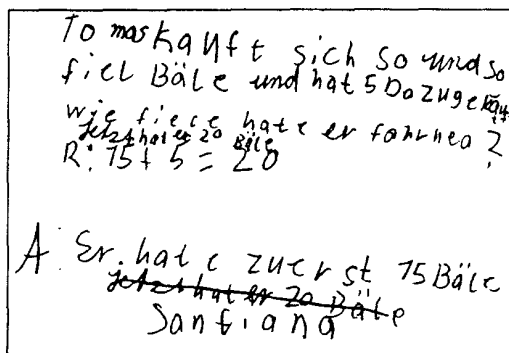


Abb. 1



Abb. 2

2.4.3 Das abstrakt-symbolische Trainingsprogramm

Die Realisierung dieses Programms erfordert ein Umdenken in der Art, wie Lernumgebungen zu gestalten sind, um die entsprechenden Lernprozesse in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Denn es scheint doch so, dass es mit Blick auf Kinder im frühen Grundschulalter keine Alternative gibt zu einem Vorgehen, bei dem realen Situationen und Handlungen am Anfang des Lernprozesses stehen (es sei denn, man wollte zu Methoden wie in den Zeiten der „Mengenlehre“ zurückkehren).

Beim alltagsnahen Programm bekommt eine Zeichenkette wie „ $3 + \square = 7$ “ für die Kinder dadurch Bedeutung, dass sie lernen, die Zeichenkette mit unterschiedlichen Situationen in Verbindung zu bringen, um sie dann in verschiedenen Situationen verwenden zu können. Die Alternative besteht nun darin, von vorne herein eine Vorstellung davon zu vermitteln, dass Zeichenketten als Darstellungen von *Beziehungen zwischen Zahlen* verstanden werden können. Diese Art des Verständnisses ist selbstverständlich auch bei jedem anderen Vorgehen ein Ziel des Lernprozesses, und es wird sicher auch bei vielen

Kindern erreicht. Das abstrakt-symbolische Programm unterscheidet sich hiervon durch ein anderes Setzen der Prioritäten. Bei der Unterrichtsplanung zu diesem Programm gingen wir von der Frage aus, welche Art von Aufgaben, genauer: welche Art von mathematischen Beziehungen und Strukturen den Kindern besondere Schwierigkeiten bereiten und warum; das Programm zielt darauf, diese Schwierigkeiten explizit zum Thema des Unterrichts zu machen und gezielte Hilfen zu ihrer Überwindung anzubieten. (Um nicht missverstanden zu werden: Jede gute Lehrerin kennt nicht nur die spezifischen Schwierigkeiten gewisser Aufgabentypen im Mathematikunterricht der Grundschule und ergreift Maßnahmen, um gerade den schwächeren Kindern zu helfen, diese Schwierigkeiten zu überwinden, so dass der Unterricht sowohl Handlungen als auch abstrakt-symbolische Aktivitäten umfasst. Die Effekte dieses „normalen“ unterrichtlichen Vorgehens zu überprüfen war Ziel der drei Vergleichsklassen.)

Selbstverständlich muss auch das abstrakt-symbolische Trainingsprogramm kindgemäß, also dem zweiten Schuljahr angemessen sein. Es ist also nicht in dem Sinne „abstrakt“, dass über die Bedeutung von formalen Notationen gesprochen würde, sondern auch in diesem Programm wurde „spielerisch“ vorgegangen, allerdings waren die Spiele von anderer Art als die im alltagsnahen Programm; die für „Spiele“ aufgewandte Zeit war jedoch bei beiden Programmen etwa gleich. Veranschaulichungsmittel und Konkretisierungen waren vor allem der Zahlenstrahl und die Hundertertafel (ggf. zunächst Vorformen von beiden wie Perlenketten und Rechenrahmen), aber es ging auch um Denkspiele der folgenden Art: „Ich denke mir zwei Zahlen, die eine ist um 5 größer als die andere. Welche Zahlen könnten das sein?“.

In allen drei Klassen wurden im Verlauf dieses Programms dieselben Aufgaben behandelt wie im vorher skizzierten alltagsnahen Programm. Die Einstiegsaufgabe

Die Klasse 2a macht einen Ausflug. Die Kinder fahren mit einem roten und einem grünen Kleinbus. Im roten Bus sitzen 12 Kinder. Im grünen Bus sitzen 7 Kinder.
Wie viele Kinder sitzen im roten Bus mehr als im grünen Bus?

wurde zunächst nach dem in den Klassen bekannten „Frage-Rechnung-Antwort“-Schema behandelt. Im Anschluss daran erinnerten die Lehrerinnen an die in den Klassen bekannte Hundertertafel (und im Laufe des Programms auch an den ebenfalls bekannten Zahlenstrahl); diese beiden Veranschaulichungsmittel wurden zu den wichtigsten Strukturierungshilfen bei der Lösung der Textaufgaben. Das Trainingsprogramm in diesen Klassen bestand demzufolge vor allem aus Übungen, in denen Beziehungen zwischen Zahlen im Mittelpunkt standen; die dabei entwickelten Fähigkeiten im Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen wurden von den Schülerinnen und Schülern zunehmend zur Lösung der Textaufgaben verwendet.

Anregungen für Übungen an der Hundertertafel, am Zahlenstrahl, aber auch sonstige Übungen wie z.B. die Rechenmauern, wurden u.a. dem Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1 (Wittmann und Müller, 1993) entnommen. Übungen an der Hundertertafel sahen etwa wie folgt aus: Die Kinder saßen im Halbkreis vor einem großen Poster mit einer solchen Tafel, die Lehrerin ließ die Kinder anhand der Tafel folgende „Wegbeschreibung“ nachvollziehen (2. Stunde):

- „1. Am Anfang stand ich auf der 7.
2. Dann bin ich einen Schritt nach unten gegangen.
3. Danach bin ich 26 Schritte vorwärts gegangen.
4. Dann bin ich 3 Schritte nach oben und einen nach links gegangen.
5. Wo bin ich?“

In der 5. Stunde - wieder vor der Hundertertafel - wurde besprochen, was es *rechnerisch* bedeutet, einen Schritt nach links, rechts, oben, unten, links oben, rechts unten usw. zu gehen (bei früheren Übungen waren bereits Pfeile als Kennzeichnungen für diese Schritte vereinbart worden). Anschließend betrachten die Kinder Wege, auf denen man 34 Schritte vorwärts gehen kann, z.B. Schritt für Schritt oder drei Zeilen herunter und vier Spalten nach rechts, die jeweiligen Rechnungen wurden aufgeschrieben. Beim „Wo bin ich?“-Spiel sollten die Kinder, die sich dies zutrauten, jetzt mit geschlossenen Augen versuchen herauszufinden, wo sich die Lehrerin am Ende befand. Weitere Übungen bestanden z.B. darin, in Ausschnitten aus der Hundertertafel fehlende Zahlen zu ergänzen (vgl. Abb. 3).

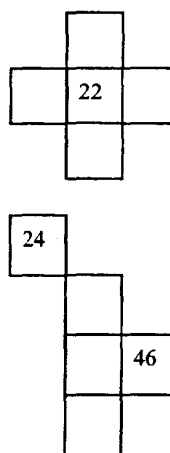


Abb. 3

Am Zahlenstrahl wurde unter anderem „Mister X“ gespielt, d.h. es wurde ein (bis auf die 0 und die 100) leerer Zahlenstrahl an die Tafel gezeichnet und die Lehrerin (oder ein/e Schüler/in) schrieb an die Rückseite der Tafel eine Zahl zwischen 0 und 100. Die Spieler versuchten diese Zahl zu erraten, indem sie den Zahlbereich immer weiter einengten, mitgeteilt wurde nur, ob die genannte Zahl zu groß oder zu klein war; die Spieler hatten höchstens 10 Versuche.

Bei der Lösung der Textaufgaben wurde zunehmend Wert auf die formale Darstellung der Rechnungen gelegt. Die Aufgaben wurden zunächst unter Verwendung von Materialien wie Rechenrahmen, Hundertertafel oder Zahlenstrahl gelöst, anschließend wurden verschiedene Lösungswege erarbeitet und die dazugehörigen Formalisierungen an der Tafel festgehalten, so zum Beispiel bei der 5. Aufgabe:

Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt.
Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?

$$19 + \square = 34 \quad \text{oder} \quad 34 - 19 = \square \quad \text{oder} \quad 34 - \square = 19.$$

Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert, einen Antwortsatz zu schreiben, die schnelleren konnten dieselbe Aufgabe auch noch mit anderen Zahlen lösen.

Wie beim alltagsnahem Trainingsprogramm wurden die Kinder in dieser Gruppe im Anschluss an die Behandlung der Aufgabe 9

David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten.

Wie viele Karten hatte er vorher?

in einer der drei beteiligten Klassen aufgefordert, selbst Rechengeschichten zu erfinden, die die gleiche Struktur wie diese Aufgabe haben. Neun der 22 selbst erfundenen Geschichten der Kinder hatten eine der Aufgabe 9 vergleichbare Struktur (in einer anderen Klasse war eine Aufgabe 6 vergleichbare „mehr/weniger“-Situation zu erfinden, diese Aufgabenstruktur ist einfacher als die von Aufgabe 9 und wurde von fast allen Kindern der Klasse adäquat wiedergegeben).

3. Ergebnisse

3.1. Ergebnisse in der Übersicht

Bei der Darstellung der Ergebnisse werden die Zuwächse in den Anzahlen richtiger Lösungen für die drei Programme (zwei Trainingsprogramme und die Vergleichsklassen) miteinander verglichen. Dargestellt sind in der folgenden Tab. 1 und in den Blockdiagrammen (Abb. 4 und 5 a,b) die Mittelwerte richtiger Lösungen im Vor- und im Nachtest (die Nachtestwerte erscheinen als Zuwächse über den Vortestwerten); in der Tabelle sind diese Werte für die Gesamtgruppe aufgelistet, während sie in den Blockdiagrammen getrennt aufgeführt sind für die (im Vortest) schwächere bzw. stärkere Hälfte der Kinder, die an den jeweiligen Trainingsprogrammen teilgenommen haben (Mediansplit). Die Ergebnisse sind sowohl bei den Textaufgaben als auch bei den Rechenaufgaben (im Speed- und im Powertest) recht eindeutig:

	Alle Schülerinnen und Schüler		
Mittelwerte	abstrakt-symbolisches Programm	alltagsnahes Programm	Vergleichsklassen
Textaufgaben			
richtige Lösungen im Vortest	6,5	6,3	6,4
Gewinn im Nachtest	3,5	2,4	2,6
Speedtest			
richtige Lösungen im Vortest	8,1	7,8	6,8
Gewinn im Nachtest	4,4	1,4	2,4
Powertest			
richtige Lösungen im Vortest	4,7	4,5	4,7
Gewinn im Nachtest	1,1	0,6	0,5

Tab. 1: Ergebnisse bei den Textaufgaben und den Rechenaufgaben

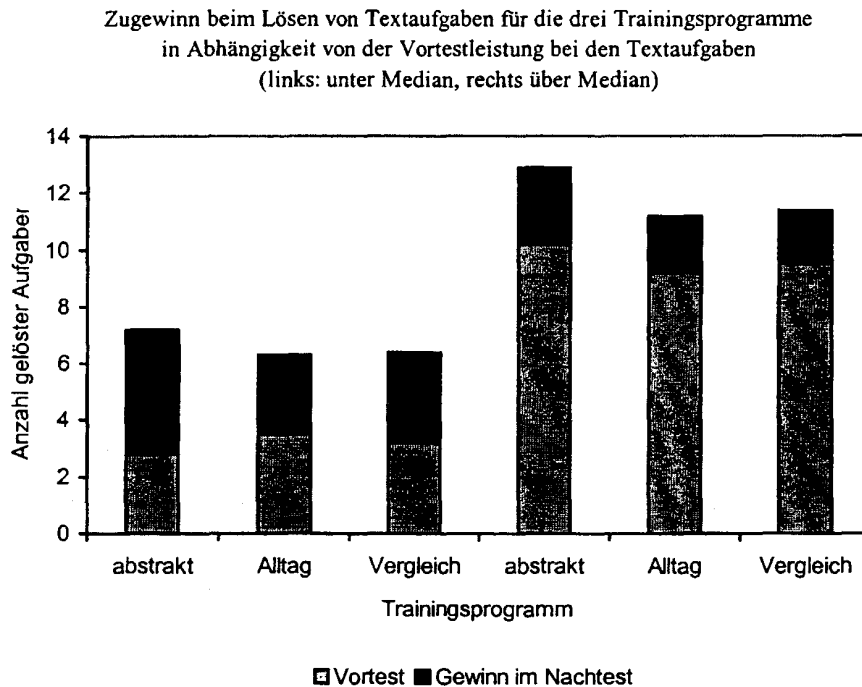
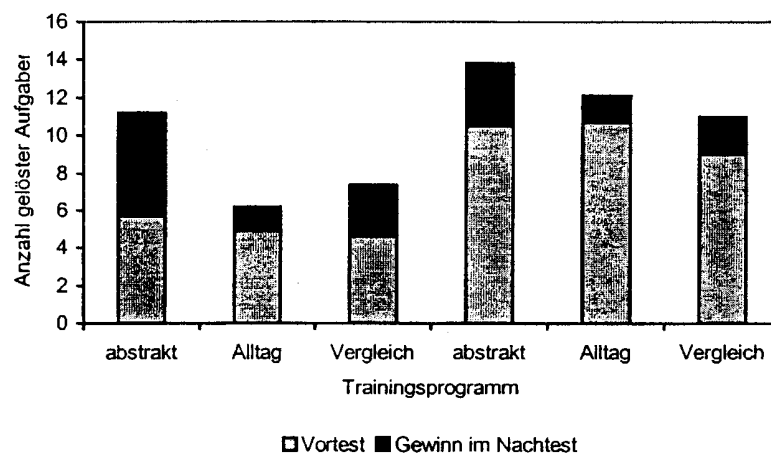


Abb. 4: Richtige Lösungen im Vor- und Nachtest bei den Textaufgaben

Eine dreifaktorielle Varianzanalyse mit den Faktoren Trainingsprogramm, Vortestleistung beim Lösen der Textaufgaben und Zeit (Vortest, Nachtest) ergab signifikante Haupteffekte für den Faktor Zeit ($F_{(1,163)} = 165,02$, $p < .000$) und den Faktor Vortestleistung ($F_{(1,163)} = 7,95$, $p < .001$). Kinder mit schwächeren Vortestleistungen zeigten nach dem Training einen stärkeren Leistungsanstieg als Kinder mit stärkeren Vortestleistungen. Ebenfalls signifikant ist die Interaktion zwischen Zeit und Trainingsprogramm ($F_{(2,163)} = 2,84$, $p < .05$). Post-hoc Tests ergaben, dass der Lerngewinn in der Gruppe mit dem abstrakt-symbolischen Training größer war als in den beiden anderen Gruppen.

Für die beiden Rechentests (Abb. 5 a,b) ergaben sich im Hinblick auf Signifikanz im wesentlichen dieselben Ergebnisse wie bei den Textaufgaben; insbesondere war auch hier die Interaktion zwischen Zeit und Trainingsprogramm signifikant ($F_{(2,163)} = 5,60$, $p < .01$ beim Speedtest und $F_{(2,162)} = 2,76$, $p < .05$ beim Powertest). Bei beiden Rechentest war der Lerngewinn in der Gruppe mit dem abstrakt-symbolischen Trainingsprogramm größer als der in den beiden anderen Gruppen.

Zugewinn beim Lösen der Speedaufgaben für die drei Trainingsprogramme in Abhängigkeit von der Vortestleistung im Lösen von Speedaufgaben (links: unter Median, rechts über Median)



Zugewinn beim Lösen der schweren Rechenaufgaben für die drei Trainingsprogramme in Abhängigkeit von der Vortestleistung im Lösen dieser Aufgaben (links: unter Median, rechts über Median)

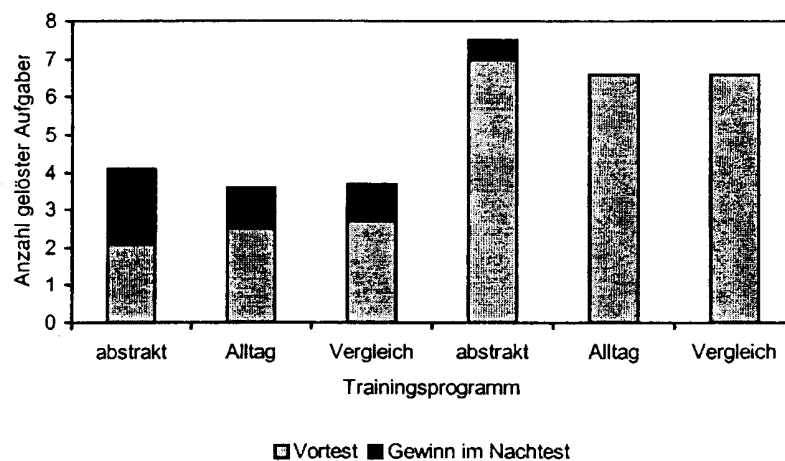


Abb. 5 a,b: Richtige Lösungen im Vor- und Nachtest bei den Rechenaufgaben

Auffällig ist in allen Tests der teilweise recht beachtlicher Zugewinn bei den richtigen Lösungen gerade in der *schwächeren Hälfte der Kinder*. Dass es solche Leistungsverbesserungen gab, war zu erwarten, da es stets einen signifikanten Zusammenhang zwischen aufgewandter Unterrichtszeit und Lernfortschritt gibt, durchaus nicht selbstverständlich ist aber, dass dies nicht nur auf die Textaufgaben, die Inhalt der Trainingsprogramme waren, sondern auch auf beide reinen Rechentests zutrifft. Die Kinder profitieren also allem Anschein nach auch in ihren Rechenfertigkeiten von dem gezielten Eingehen auf unsere Textaufgaben. Insbesondere profitierten die Kinder in den Vergleichsklassen, also in den Klassen, in denen der Unterricht von den Lehrerinnen nach deren Vorstellungen gestaltet worden ist - auch dies nicht überraschend, aber sehr erfreulich. Die eigentliche Überraschung ist dabei, dass die schwächere Hälfte in den Vergleichsklassen mehr profitiert als die entsprechenden Kinder im alltagsnahen Trainingsprogramm, *bei den schwächeren Kindern bewirkte das alltagsnahe Programm eindeutig am wenigsten, während das abstrakte Programm den besten Leistungszuwachs bewirkte.*

Betrachtet man nur die Gruppe der *leistungsstärkeren* Kinder, so sind die Unterschiede in den Effekten der drei Programme deutlich geringer als in der schwächeren Gruppe. Dabei ist zu bedenken, dass Textaufgaben für die Kinder ja nicht neu, sondern bereits früher Inhalt des Unterrichtes gewesen waren; es ist deshalb nicht erstaunlich, dass die Hälfte der Kinder, die bereits im Vortest in allen Bereichen ansprechende Leistungen gezeigt hatte, sich insgesamt durch die Trainingsprogramme nur noch in geringerem Maße verbessern konnte. Es bleibt aber zu beachten, dass auch bei den leistungsstärkeren Kindern das abstrakt-symbolische Programm zum größten Lernzuwachs führte.

3.2. Ergebnisse bei einzelnen Textaufgaben

Die im Vortest gemessenen Schwierigkeitsgrade der 16 Textaufgaben stimmt bei den Aufgaben, für die ein Vergleich möglich ist, recht gut mit den von Stern (1998, S. 89) genannten überein. Von den 16 Textaufgaben waren 6 schwer bis sehr schwer (diese Aufgaben lösten im Mittel zwischen 11,4% und 25,6% der Kinder im Vortest korrekt), 6 von mittlerem Schwierigkeitsgrad (richtige Lösungen bei 41,9% bis 55,0% der Kinder) und 4 leicht bis sehr leicht (richtige Lösungen bei 60,3 bis 83,9% der Kinder).

Die Aufgabe mit dem geringsten Zuwachs an richtigen Lösungen zwischen Vor- und Nachtest war - nicht überraschend - die im Vortest leichteste (der Zuwachs betrug 4,0%); die Aufgabe mit dem größten Zuwachs war die Aufgabe 11 (um 29,1%, von 16,8% richtigen Lösungen im Vortest auf 45,9% im Nachtest):

Bis zum Mittag hatte Tina 3 Ostereier gefunden. Bis zum Abend hatte sie zusammen 9 Ostereier gefunden. Wie viele Ostereier hatte sie am Nachmittag gefunden?

Diese Aufgabe ist eine der wenigen (5 von 16), bei denen der Zuwachs in der stärkeren Hälfte der Kinder größer war als in der schwächeren Hälfte (37,3% Zuwachs in der stärkeren, 20,9% in der schwächeren Hälfte); auch die übrigen vier Aufgaben, bei denen die stärkeren Kinder mehr von den Trainingsprogrammen profitierten als die schwächeren, gehören zu den im Vortest sehr schweren Aufgaben, die weniger als 20% der Kinder richtig lösen konnten. Abgesehen von der oben genannten Aufgabe 11 sind diese schwe-

ren Aufgaben komplex, d.h. sie erfordern zu ihrer Lösung mindestens zwei Schritte. Drei von diesen sind Aufgaben, in denen die Relationsbegriffe „mehr“ oder „weniger“ in einer Folge von Rechenschritten zu verarbeiten waren. Ein Beispiel (Aufgabe 12):

Jan hat 7 Hasen. Er hat 4 Hasen mehr als Thomas. Wie viele Hasen haben beide zusammen?

Diese Aufgabe war eine der schwersten im Vortest (richtige Lösungen bei 16,1% der Kinder), und wir haben sie auch später in einer Interviewserie mit denselben Kindern eingesetzt, um Ursachen für diese Schwierigkeit zu ergründen. Dabei zeigte sich, dass die Schwierigkeit dieser und ähnlicher Aufgaben nicht mit einer mangelnden Lesefertigkeit zu erklären ist, sondern dass manche Kinder die Relation „mehr als“ im zweiten Satz der Aufgabenstellung schlicht nicht zur Kenntnis nahmen und den Satz im Sinne von „Thomas hat vier Hasen“ interpretierten, nachdem sie die Frage „Wie viele Hasen haben beide zusammen?“ gelesen hatten, d.h. in ihrer mentalen Repräsentation der Situation kommen nur Kardinalzahlen und die Mengenvereinigung vor, die Relation wird ignoriert. Dagegen sind Aufgaben, in denen es ausschließlich um das Erkennen von Relationen geht, deutlich leichter als die eben genannte, wie zum Beispiel Aufgabe 2

Uli hat 4 Bälle. Er hat 3 Bälle weniger als Britta. Wie viele Bälle hat Britta?

(mit richtigen Lösungen bei 41,9% der Kinder im Vortest) bzw. Aufgabe 1

Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria weniger als Hans?

(mit richtigen Lösungen bei 60,3% der Kinder im Vortest). Der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben wie Aufgabe 12 wird also keineswegs dadurch bestimmt, dass die Kinder nicht wussten, was „mehr“ oder „weniger“ bedeutet, sondern dadurch, dass nicht der direkte Vergleich, sondern Beziehungen zwischen Zahlen (unter Verwendung des Vergleichs) hergestellt und weiter verarbeitet werden müssen.

Große Unterschiede in der Wirkung der Trainingsprogramme gab es, wie in 3.1. gezeigt, in der schwächeren Hälfte der Kinder. Die einzige Aufgabe, bei der die schwächeren Kinder vom alltagsnahen Trainingsprogramm deutlich mehr profitierten als die Kinder in den anderen Programmen ist die oben genannte Aufgabe 2 (eine mittelschwere Aufgabe; merkwürdigerweise ist bei dieser Aufgabe in der stärkeren Hälfte der Kinder beim alltagsnahen Trainingsprogramm ein erheblicher Abfall (um 18,5%) in den richtigen Lösungen zu beobachten, so dass es müßig erscheint, über Gründe zu spekulieren). Bei insgesamt 7 der 16 Textaufgaben profitierten die schwächeren Kinder im abstrakt-symbolischen Trainingsprogramm deutlich mehr als die in den anderen Programmen; diese Aufgaben sind es, die im vorigen Abschnitt auf der Grundlage der quantitativen Datenanalyse ermittelte Überlegenheit des abstrakt-symbolischen Trainingsprogramms bei den schwächeren Kindern vor allem bewirkten. Von diesen 7 Aufgaben gehören 4 zu den Aufgaben mit mittlerem Schwierigkeitsgrad, 2 zu den schwereren und eine zu den leichten. Gemeinsam ist 6 dieser 7 Aufgaben, dass ihre Lösungen nicht unmittelbar aus Handlungsvorstellungen gewonnen werden können, sondern dass dazu die Konstruktion mentaler Modelle und das Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen erforderlich oder zumindest hilfreich ist. Bei den Aufgaben handelt sich um je eine vom Typ $a + \square = c$,

$a - \square = c$ (oder $c - a = \square$) und $\square - b = c$ sowie eine leichte und zwei mittelschwere Aufgaben vom Typ „mehr/weniger“; die restliche Aufgabe ist eine schwere komplexe Aufgabe:

Bis zum Mittag hatte Tina 3 Ostereier gefunden. Bis zum Abend hatte sie zusammen 9 Ostereier gefunden. Wie viele Ostereier hatte sie am Nachmittag gefunden?

Susanne und Tobias haben zusammen 8 Murmeln. Tobias hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Susanne?

Am Anfang hatte Peter einige Murmeln. Dann verlor er im Spiel mit einem Freund 3 Murmeln. Jetzt hat Peter noch 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte Peter am Anfang?

Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria weniger als Hans?

Bernd hat 8 Bilder. Er hat 5 Bilder mehr als Erika. Wie viele Bilder hat Erika?

Hans hat 9 Fische. Lea hat 6 Fische. Wie viele Fische hat Lea weniger als Hans?

Hans und Beate haben zusammen 6 Äpfel. Hans hat 2 Äpfel. Klaus und Inge haben zusammen 9 Äpfel. Klaus hat 5 Äpfel. Wie viele Äpfel haben Beate und Inge zusammen?

Bei 6 dieser 7 Aufgaben (bei allen außer der zuletzt genannten) ist auch bei den Kindern im alltagsnahen Trainingsprogramm ein Leistungsfortschritt zwischen Vor- und Nachtest zu erkennen, doch ist dieser (gemessen im Zuwachs richtiger Lösungen pro Aufgabe) sehr viel geringer als in der Gruppe, die im abstrakt-symbolischen Programm unterrichtet wurde.

4. Diskussion

Die Ergebnisse, wonach insbesondere leistungsschwächere Kinder von dem anspruchsvolleren abstrakt-symbolischen Trainingsprogramm profitieren, sind nicht wirklich überraschend. Es ist vielmehr plausibel, dass man gerade die weniger leistungsstarken Kinder am besten fördern kann, wenn man ihnen gezielt dabei hilft, die im Konkreten und Offensichtlichen enthaltenen Beziehungen, Muster und Strukturen zu erkennen, die sie - anders als die leistungsstärkeren Kinder - nicht selbst finden, und weniger dadurch, dass man sich immer wieder auf das Offensichtliche und Konkrete zurückzieht. Allerdings steht diese Erkenntnis offenbar im Widerspruch zu einer gerade bei Grundschullehrerinnen sehr verbreiteten Haltung. So stellt z.B. Gellert (1999, S. 114/131) fest, dass viele angehende Grundschullehrerinnen die „Schülerorientierung“ mit der Vorstellung verbinden, dass Mathematikunterricht in der Grundschule allein auf der Basis eines gesunden Menschenverstandes leistbar sei (und das heisst: ohne weitergehende Kenntnisse auch nur der elementaren Mathematik), und dass es diesen Lehrerinnen deshalb in der Regel nicht gelingt, gutgemeinte Ansätze, wie das Integrieren spielerischer Elemente in den Mathematikunterricht, mit mathematischen Themen zu verbinden.

Wir gehen davon aus, dass die Schwierigkeiten vieler Kinder mit der Mathematik im Unterricht der Sekundarstufe zumindest teilweise auf unzureichende Förderung in der Grundschule zurückzuführen sind. Die für den gegenwärtigen Grundschulunterricht typi-

sche Konzentration auf die Verwendung der Zahlen als Rechenzahlen bzw. als Kardinalzahlen (Mächtigkeiten von Mengen) in Sachaufgaben führt zu einem eingeschränkten mathematischen Verständnis. In den ersten Schuljahren lassen sich die meisten Aufgaben allein mit Hilfe konkreter Handlungsvorstellungen lösen; dieses Denken ist aber in den höheren Klassen völlig unzureichend (verwiesen sei nur auf die bekannten Probleme in der Bruchrechnung, vgl. z.B. Hasemann und Mangel, 1989). Kinder sollten bereits in der Grundschule lernen, Beziehungen zwischen Zahlen zu modellieren.

Allem Anschein nach reicht das in den Schulen verbreitete Vorgehen „vom Konkreten zum Abstrakten“ allein nicht aus, den schwächeren Kindern dabei zu helfen, sich vom Konkreten und Offensichtlichen zu lösen und die in der konkreten Situation enthaltenen Beziehungen und Strukturen zu erkennen. Selbstverständlich muss im Mathematikunterricht anfangs auch von konkreten Situationen und Handlungen und von dem für die Kinder direkt Erfassbaren ausgegangen werden, darüber hinaus ist es aber erforderlich, *gezielt* (und nicht nur implizit) auf Beziehungen und Strukturen einzugehen. Wenn sie nicht ausschließlich als Zählwerkzeuge verstanden werden, können Materialien wie z.B. die Hundertertafel und der Zahlenstrahl (mit ihren Vorformen wie Rechenrahmen, Zwanzigerfeld und Rechenkette) sehr gute Erfahrungs- und Übungsfelder sein, die es gerade den schwächeren Kindern erlauben, mentale Modelle von Situationen zu konstruieren, in denen auch die mathematischen Beziehungen repräsentiert sind. Bestärkt werden wir in dieser Überzeugung durch die Beobachtung, dass es im wesentlichen nicht Sprachprobleme (geringe Lesefertigkeiten oder mangelnde Kenntnisse der deutschen Sprache) sind, die den Kindern die Probleme mit den Textaufgaben bereiten, sondern dass mathematische Einsichten in gewissem Umfang unabhängig von der gesprochenen Sprache sind (ein schönes Beispiel zeigt Abb. 1, vgl. 2.4.2).

In dieser Interventionsstudie wurden alltagsnahe und abstrakt-symbolische Aktivitäten in den Trainingsprogrammen zu Forschungszwecken möglichst gut getrennt eingesetzt; dass ein guter Mathematikunterricht in der Grundschule beide Aspekte miteinander verbinden muss, ist selbstverständlich. Unsere Untersuchung hat gezeigt, dass es möglich ist, durch gezielte abstrakt-symbolische Aktivitäten auch schwächere Grundschulkinder zu selbständigen Einsichten in mathematischen Beziehungen zu bringen, die entsprechenden Unterrichtsmaterialien und didaktischen und methodischen Vorschläge gibt es seit langem.

5. Literatur:

Carraher, T.N., Carraher, D.W. und Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29.

Franke, M. (1998): Kinder bearbeiten Sachsituationen in Bild-Text-Darstellung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, S. 89-122.

Gellert, U. (1999): Vorstellungen angehender Grundschullehrerinnen von Schülerorientierung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 20, 113-137.

- Hasemann, K. und Mangel, H.-P. (1999): Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 20, 138-165.
- Lave, J. (1988), *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. New York: Cambridge University Press.
- Radatz, H. u.a. (1996): *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.
- Radatz, H. u.a. (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.
- Staub, F. C. und Stern, E. (1997). Abstract reasoning with mathematical constructs. *International Journal of Educational Research*, 27(1), 63-75.
- Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so hard for children? *Journal of Educational Psychology*, 85, 7-23.
- Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst Publisher.
- Stern, E. und Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7, 259-268.
- Streefland, L. (1988): *Realistisch Breukenonderwijs*. Universiteit Utrecht: Vakgroep OW&OC.
- Treffers, A. (1987): *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht usw.: Reidel.
- Treffers, A.; Goffree, F. (1985): *Rational Analysis of Realistic Mathematics Education - The Wiskobas Program*. In: *Proc. Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Noordwijkerhout, 22.-29.7.1985, vol. 2, 97-121.
- Van den Brink, F.J. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. OW&OC, no. 10, Universiteit Utrecht.
- Wygotski, L.S. (1964): *Denken und Sprechen*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Wittmann, E.Ch., Müller, G.N. (1993): *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Bd. 1. Stuttgart: Klett.

Klaus Hasemann
Universität Hannover
Bismarckstr. 2
30173 Hannover

Elsbeth Stern
Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Lentzeallee 94
14195 Berlin

Manuskripteingang: 22. Mai 2002

Typskripteingang: 23. September 2002