DIE R3CH3NPATEN

www.die-rechenpaten.de

Wie Kinder Rechnen lernen und dabei Spaß haben

Autor: Johannes Hinkelammert

Das hier vorgestellte Förderkonzept ist aus den Seminaren zum Thema Rechenschwäche („Rechenpate-Projekt“) heraus entstanden, die ich an der Freien Universität Berlin im Rahmen der Lehrerausbildung erteilt habe. Dabei beruht das Förderkonzept maßgeblich auf meiner langjährigen Expertise als Lehrer und Lerntherapeut, meiner Tätigkeit als Lehrbeauftragter an der Freien Universität Berlin sowie aktuellen mathematikdidaktischen Forschungen.
Diese zeigen, dass wenige mathematische Grundkonzepte notwendig sind, um eine mathematische Förderung in der Grundschule erfolgreich durchführen zu können. Dabei sind diese Grundkonzepte, auf die sich das in diesem Buch vorgestellte Förderkonzept konzentriert, so wesentlich, dass ohne sie kein mathematisches Verständnis aufgebaut werden kann.
Über diese Grundkonzepte hinaus ist jedoch die Fähigkeit der Abstraktion sowie die Ausbildung abstrakter Sprache bzw. der „Bildungssprache“ mindestens genauso wichtig. So belegen wissenschaftliche Forschungen immer wieder: Nicht das richtige Lösen von Aufgaben, sondern die Abstraktionsfähigkeit sowie der entsprechende sprachliche Ausdruck führen zum Schulerfolg.
In der Fokussierung auf vier Grundkonzepte und der Abstraktionsfähigkeit liegt die Besonderheit und Effizienz des Konzeptes begründet. So ist es gerade auch für Kinder aus bildungsfernen Milieus, für die der Umgang mit abstrakten Strukturen sowie die Nutzung der sog. „Bildungssprache“ eher ungewohnt ist.
Leichte Verständlichkeit und Kompaktheit zeichnen dieses Förderkonzept aus, weshalb es sowohl für den professionellen Bereich, als auch für Eltern geeignet ist. Fachfremd unterrichtende Lehrer sowie Förderlehrer und Erzieher in der Schule werden in diesem Buch wertvolle Hilfen für die mathematische Förderung im beruflichen Alltag finden.
Dabei ist das Konzept so offen gestaltet, dass es in allen Altersgruppen von der Frühförderung im Kindergarten über die Grund- und Oberschule bis hin zur Grundbildung Erwachsener eingesetzt werden kann.
Das Konzept ist ganz bewusst auf die Fördertätigkeit ausgerichtet und daher sehr praxisnah. Es setzt sich weder mit Theorien zur Rechenschwäche auseinander, noch befasst es sich mehr als unbedingt notwendig mit der Mathematikdidaktik.
Die im Buch vorgestellten Lernspiele sind als Brett- und Bewegungsspiele mit dem Förderkonzept eng verzahnt und wurden langjährig von mir sowie Studierenden des Lehramts an Schulen erprobt. Hierbei erlauben die Lernspiele einen niederschwelligen, angstfreien Zugang zur Mathematik. Selbst Lernende, die eine große Ablehnung gegen das Fach Mathematik entwickelt haben, konnten so an die Fördertätigkeit herangeführt werden.
Da den Lernspielen in diesem Konzept eine große Bedeutung zukommt widmen wir der Erprobung der Lernspiele einen großen Teil des Seminars.

Die durchgängige Nutzung der männlichen Personalform dient ausschließlich der besseren Lesbarkeit des Textes und stellt in keinem Fall eine Diskriminierung unserer weiblichen Leserinnen dar.

Vorwort

Dieses Skript beschreibt wesentliche Inhalte des Rechenpate-Seminars. Für die Durchführung der Förderung nach diesem Konzept ist die Förderbox geschaffen worden, in der alle Materialien enthalten sind, die benötigt werden, um eine spielerische und erfolgreiche mathematische Förderung durchzuführen. Es ist allen gewidmet, die Kindern, Jugendlichen oder auch Erwachsenen den spielerischen Erwerb mathematischer Grundkonzepte ermöglichen wollen, insbesondere den studentischen Rechenpaten, die im Rahmen des „Rechenpate-Projekts“ der Freien Universität Berlin oder als Honorarkräfte des Unternehmens „Die Rechenpaten“ bereits jahrelang erfolgreiche Förderungen durchführen.

Das vorgestellte Förderkonzept ist vor dem Hintergrund einer mehr als zehnjährigen Praxis des Autors als Lerntherapeut für Dyskalkulie, Lehrer und Dozent an der Freien Universität Berlin entstanden: „Ich habe die Spiele zum Rechnen lernen entwickelt, weil die Kinder, mit denen ich zu tun hatte, sehr wenig Lust hatten, sich mit der Mathematik zu beschäftigen. Durch die Spiele gelang es ihnen, die Mathematik für sich neu zu verankern bzw. sie im neuen Kontext des Spielerischen zu sehen. Dadurch wurde die Mathematik emotional neu besetzt und positiv interpretiert, sodass diese positive Einstellung anschließend wieder von den Spielen abgelöst und auf die Mathematik übertragen werden konnte.“

Das zentrale Thema dieses Buches ist das Rechnen bzw. die Arithmetik der Grundschule. Deswegen werden Sie in diesem Buch keine Hinweise zu Themen wie der Geometrie, der Stochastik oder dem Rechnen mit Größen finden.

Es behandelt die Grundlagen der Arithmetik der Klassenstufen 1 bis 4. Schwerpunkte sind die Entwicklung des Zahlbegriffs, vom Zahlenraum bis Zehn hin zum Zahlenraum bis Tausend und darüber hinaus sowie die Grundrechenoperationen.

Mit dem hier vorgestellte Förderkonzept sollen rechenschwache Kinder unabhängig von der Klassenstufe in die Lage versetzt werden, kreativ und entdeckend am Mathematik/Förderunterricht teilnehmen zu können.

Im Rahmen des an der Freien Universität Berlin entwickelten „Rechenpate-Projekts“ konnte ich dieses Förderkonzept den Studierenden erfolgreich vermitteln. So sind viele der Studierenden und zukünftigen Lehrkräfte erst durch das Projekt in die Lage versetzt worden, das Phänomen des rechenschwachen Schülers zu verstehen und eine adäquate Förderung durchzuführen. Viele Kinder haben dank dieser Studierenden sowohl gelernt zu rechnen, als auch zu erkennen, dass Mathematik Spaß machen kann. Mein großer Dank gehört daher diesen vielen Studierenden und ihrem wunderbaren Engagement.

Das vorliegende Buch nimmt Bezug auf die von mir entwickelten Spiele zum Rechnen lernen. Mehr als zehn Jahre waren notwendig, um immer wieder zu prüfen, ob sich die Spiele in der Praxis bewähren konnten und in Übereinstimmung mit dem hier dargestellten Förderkonzept standen.

Das Förderkonzept und die Spiele sind daher sehr eng miteinander verzahnt. In meinen Seminaren, wie ich sie z.B. im Rahmen des „Rechenpate-Projekts“ an der Freien Universität Berlin erteile, lernen Studierende sowohl das theoretische Konzept der Förderung, als auch die erfolgreiche praktische Anwendung der Lernspiele kennen. Gerade in den vielen Spielphasen, die regelmäßig reflektiert werden, erkennen die Studierenden die zuvor erlernten theoretischen Grundlagen wieder. So entsteht eine enge Theorie-Praxis-Verknüpfung, die es den Teilnehmern ermöglicht das Erlernte unmittelbar nach der Ausbildung umzusetzen.

Informationen zum „Rechenpate-Projekt“ der Freien Universität Berlin erhalten Sie unter www.rechenpate.de.

Einführung

Abstraktes Denken ist eine Schlüsselfähigkeit, um im Mathematikunterricht erfolgreich zu sein.

Das hier vorgestellte Konzept ordnet die Inhalte der Arithmetik der Grundschule (Klassenstufe 1 bis 4) drei wesentlichen Lernschritten zu:

1. Dem Konzept der Menge

2. Dem Konzept der Bündelung

3. Dem Konzept der Vervielfachung

Die Reduzierung auf insgesamt nur drei schulmathematisch inhaltliche Lernschritte, stellt die Besonderheit des vorgelegten Förderkonzepts dar. Dabei beinhalten die drei Lernschritte jeweils in sich einen für das mathematische Verständnis wesentlichen Abstraktionsvorgang.

Somti wird die für die mathematischen Inhalte notwendige Abstraktionsleistung in das Zentrum des Lernens gerückt. Gleichzeitig wird im Eins-zu-Eins-Setting der Förderung die familiäre Struktur des Lernprozesses nachgebildet, die laut Forschungen von Frau Dr. Hasan (Hasan 2001) das Erlernen der abstrakten Sprache und des abstrakten Denkens erst ermöglicht.

Das Reflektieren und Versprachlichen mathematischer Vorgänge stellen ind diesem Förderkonzept grundlegende Techniken der Förderung dar und dienen dazu, den Abstraktionsprozess zu fördern.

Vor diesem Hintergrund werden einige Fragen während der Förderung immer wieder bewusst gestellt: „Wie hast du das gemacht?“, „Wie bist du darauf gekommen?“, „Wie hast du das herausgefunden?“, „Warum ist das so?“.

Förderlehrer geben sich also nicht mit den Ergebnissen zufrieden, diese spielen im Gegenteil sogar eine untergeordnete Rolle. Vielmehr steht der Prozess der Ergebnisfindung im Vordergrund und wird durch die oben genannten Fragen angestoßen und gewürdigt. So entsteht im Prozess die wesentliche Denkleistung: die Abstraktion.

Die hohe Effektivität des in diesem Buch vorgestellten Förderkonzepts wird erreicht, indem

1. Die Abstraktionsleistung konsequent in den Mittelpunkt der Förderung gestellt wird und

2. die mathematischen Inhalte der Grundschularithmetik (Klassenstufe 1 bis 4) auf drei wesentliche Inhalte reduziert und als Vehikel für das Erlernen der Abstraktionsfähigkeit angesehen werden. Dadurch wird die - neben dem Rechnen - wesentlich zu fördernde Fähigkeit, die Abstraktionsfähigkeit, in den Fokus gerückt.

Durch diese Vorgehensweise soll vor allem auch jene Schülergruppe erreicht werden, die im Schulsystem und vor allem im Mathematikunterricht, regelmäßig benachteiligt wird: die Kinder aus bildungsfernen Milieus. Forschungen haben sehr klar herausgestellt, dass gerade für diese Gruppe von Kindern das abstrakte Denken – und damit auch die abstrakte bzw. Bildungssprache - eine sehr große Hürde darstellt, um in der Schule im Allgemeinen sowie im Mathematikunterricht im Besonderen erfolgreich zu sein.

In den folgenden Kapiteln wird die Förderung mit Hilfe der Lernspiele und den Materialien aus der Förderbox dargestellt. Für jeden Lernschritt werden die entsprechenden Lernspiele und deren Einsatzmöglichkeiten beschrieben.

Die hier vorgestellte Vorgehensweise soll in keinem Fall programmatisch verstanden werden, denn mir bereiten Lernprogramme und Leitfäden Unbehagen, die – ohne Rücksicht auf Individualität und die jeweilige Situation - ein Schritt-für-Schritt-Verfahren zum vermeintlich sicheren Mathematiklernen anbieten.

So möchte ich auch dieses Konzept verstanden wissen: Gestalten Sie aus den hier präsentierten Lernspielen eine an das Kind angepasste, ganz individuelle Förderung. Entwickeln Sie ihre eigene Leidenschaft und Freude. Dazu sollen dieses Konzept und das Material der Förderbox dienen.

Teil I: Die Entwicklung des Zahlbegriffs und der Rechenoperationen oder wie Kinder Rechnen lernen

Kapitel 1: Das Konzept der Menge kennen lernen

1.1 Zählendes Rechnen im Kindergarten und der Schuleingangsphase

Die erste Rechentechnik, die Kinder lernen, ist das Zählen. Grundlage dieser Rechentechnik ist ihre Vorstellung von den Zahlen. Sie stellen sich vor, die Zahlen wären wie auf einer Perlenschnur aneinander gereiht. Mit der Vorstellung von den Zahlen Wie Perlen auf einer Perlenschnur (der Zahlenreihe) werden Addition und Subtraktion zwangsläufig zählend ausgeführt.

Beeindruckendes Beispiel hierfür ist das von Herrn Prof. Dr. Schipper in seinen Vorträgen oft demonstrierte Rechnen mit Buchstaben. Die Buchstaben sind in der Vorstellung von Erwachsenen ebenfalls wie auf einer Perlenschnur aufgereiht. Daher rechnen fast alle Erwachsene mit Buchstaben ebenfalls zählend.

Das können Sie selber ausprobieren, indem Sie diese einfache Rechnung der zweiten Klassenstufe probieren: J + O oder eine einfache Subtraktion: H – D. Juckt es Ihnen in den Fingern? Ist Subtraktion schwerer als Addition? Bemerkenswert ist: Wenn man zählend rechnet ist die Subtraktion schwerer als die Addition, denn man muss rückwärts zählen (konnten Sie im obigen Beispiel von H aus D-mal rückwärts zählen?).

Am Beispiel des Rechnens mit Buchstaben ist eindrucksvoll zu erkennen, dass das zählende Rechnen eine Folge der Vorstellung von den Zahlen ist: Mit der Vorstellung von den Zahlen auf einer Perlenschnur muss zählend gerechnet werden.

Das zählende Rechnen ist in einem Alter von 4 bis 6 Jahren angemessen. Es funktioniert bei kleinen Zahlen und vor allem bei der Addition gut.

Zählendes Rechnen sollte nicht verboten werden oder auch nur irgendwie negativ beurteilt werden. Das Gegenteil trifft zu, die Zählkompetenz sollte gefördert werden. Zählen ist wichtig, allerdings ist das nicht Thema dieses Buches.

Mit dem hier dargestellten Förderkonzept soll dem Kind eine attraktive Alternative zum Zählen geboten werden. Das Kind wird im Verlauf der Förderung immer weniger zählen, bis es nur noch in bestimmten Fällen zählt, so wie fast alle Erwachsenen auch (bei der Uhrzeit und bei den Wochentagen zählen fast alle Erwachsenen die Stunden bzw. Tage mit den Fingern vor oder zurück).

1.2 Vom zählenden Rechnen zum Rechnen mit Mengen

Das zählende Rechnen findet seine Grenzen in der Erweiterung des Zahlenraums, aber auch in der Effektivität der Ausführung von Rechenoperationen. Dies drückt sich in der Geschwindigkeit aus, mit der Rechenoperationen ausgeführt werden, aber auch in der Beanspruchung von Konzentration und Gedächtnis.

Zudem ist zählendes Rechnen äußerst unkreativ, also langweilig. Die Folge dessen ist, dass zählende Rechner langsamer rechnen, schneller ermüden, einen Teil der Aufgabe während des Rechnens vergessen und sich langweilen.

Vor dem Hintergrund des oben gesagten kann die Überwindung des zählenden Rechnens nur durch Aneignung einer neuen Vorstellung von den Zahlen stattfinden. Der Begriff „Vorstellung“ ist weit verbreitet, greift meiner Meinung nach aber zu kurz, denn das Kind muss einen vollkommen neuen Zugang zu den Zahlen bekommen, d.h. es muss die Zahlen und damit die Rechenoperationen neu denken. Daher verwende ich lieber den Begriff „Konzept“. Dieses neue Konzept ist das Konzept der Menge, das in der Literatur auch Teile-Teile-Ganzes genannt wird.

Der Erwerb dieses Konzepts kann ab dem 4. Lebensjahr erfolgen. Spätestens in der ersten Klassenstufe sollten Kinder dieses Konzept erworben haben, denn in der zweiten Klassenstufe findet die Erweiterung des Zahlenraums statt. Ab diesem Zeitpunkt zeigen sich große Nachteile für zählende Rechner.

Um das Konzept der Menge zu entwickeln, benötigen Kinder ein Bild von einer Menge, das strukturiert und alltagsfern ist (Alltagsfern deshalb, weil besonders Kinder aus bildungsfernen Milieus oft am Alltagskontext haften bleiben und nur schwer in den mathematischen Kontext zurück finden).

Für Kinder, die am zählenden Rechnen haften, ist es auch von Bedeutung, dass dieses Bild einen bildhaften Charakter hat. Deshalb halte ich die Anordnung als Reihe für ungeeignet, da sie der Vorstellung einer Perlenschnur ähnelt, von der sich die Kinder ja gerade ablösen sollen. Die Anordnung einer Reihe verleitet Kinder zum Zählen, was gerade nicht gewollt ist.

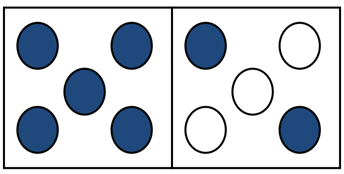
Ich verwende daher das Bild der Würfelstruktur. Gemeint ist dabei die Anordnung einer Menge wie auf dem Spielwürfel. Ein Vorteil ist, dass viele Kinder diese Struktur kennen, und auf Vorwissen zurückgegriffen werden kann. Vor allem aber ist diese Struktur tatsächlich bildhaft und verleitet nicht zum Zählen.

Zwar hat diese Struktur auch einige Nachteile, die an geeigneter Stelle erläutert werden, aber für den wichtigen Schritt der Entwicklung des Konzepts der Menge ist die Würfelstruktur in meinen Augen und aufgrund meiner langjährigen Praxis als Lerntherapeut am besten geeignet.

1.3 Die Würfelstruktur kennen lernen – „Zehn gewinnt“ und „Lückenfüller“

Die strukturierte Darstellung von Zahlen ist für viele Kinder neu. Zumindest müssen wir davon ausgehen, dass sie neu ist. Daher wird das Kind mit dieser Struktur bekannt gemacht. Von den vielen möglichen Darstellungsformen wird hier die Würfel-Fünf gewählt. Diese Darstellung ist am besten geeignet, um vom zählenden Rechnen zum Rechnen mit Mengen zu führen.

Bei der Darstellung mit der Struktur der Würfel-Fünf werden Punkte so dargestellt wie auf einem Würfel, allerdings nur bis zur Fünf. Für die Darstellung der Zahlen von 6 bis 10 wird das Muster verdoppelt zur Doppelfünf (siehe Bild weiter unten). Vielen Lehrern ist diese Darstellung von der etwas mystischen Bezeichnung „Kraft der Fünf“ her bekannt. In der Mathematik klingt das etwas spröder: Fünfer-Bündelung. Durch diese Strukturierung kann z.B. die Menge Sieben simultan in drei Einheiten wahrgenommen werden: der Fünf als eine Bündelungseinheit und den beiden zusätzlichen Einern.



Dies ist bedeutsam, da der Mensch nicht mehr als sechs Einzelobjekte simultan wahrnehmen kann. Mit Hilfe der Fünfer-Bündelung können wir über die simultane Wahrnehmung das Konzept der Menge im Zahlenraum bis Zehn im Kind entwickeln.

In dem Spiel „Zehn gewinnt“ werden die Zahlen bis Zehn in strukturierter Form dargestellt. Die Spielregeln sind letztlich nur die Beschreibung dieser Struktur. Bei diesem Spiel dürfen Kinder die Spielsteine auch zählend legen. Es geht hier lediglich um das Kennen lernen der Struktur, mit der in den darauf folgenden Spielen gelernt bzw. gespielt wird. Auch wenn ich hier Gefahr laufe mich zu wiederholen: Wesentlich ist bei diesem Spiel nur das Endprodukt eines Spielzuges, nicht der Weg dorthin, also z.B. zählend.

Bei fast allen Spielen ist ein System der Vorgehensweise angebracht, um eine Übertragung von der enaktiven (konkreten) Ebene auf die symbolische Ebene (Zahlen) zu ermöglichen und zu fördern. Es handelt sich dabei um das Protokollieren und die schriftliche Vorschau. Dieses bei fast allen Spielen anwendbare Verfahren in drei Schritten soll hier exemplarisch vorgeführt werden. Verweilen Sie bei jedem Schritt so lange wie Sie es für angebracht halten. Das können sowohl eine einzige Spielrunde, als auch zehn Spielrunden und mehr sein.

Erster Schritt: Das Spiel wird auf der enaktiven Ebene ohne Schreiben gespielt.

Zweiter Schritt: Jeder Spielzug wird ausgeführt und im Anschluss schriftlich protokolliert.

Dritter Schritt: Vor der Ausführung eines Spielzuges wird eine Vorschau schriftlich erstellt und durch die Ausführung des Spielzuges überprüft (Selbstkontrolle).

Beispiel: Auf dem Spielfeld liegen zwei Steine, und es wird eine Eins gewürfelt. Beim ersten Schritt wird ein Stein hinzugefügt, fertig. Beim zweiten Schritt wird ein Stein hinzugefügt und anschließend notiert: 2+1=3. Beim dritten Schritt wird erst notiert 2+1=3, dann wird der Spielzug ausgeführt und überprüft, ob er mit der Vorschau übereinstimmt. Beim dritten Schritt fordern wir vom Kind den Spielzug im Geiste vorwegzunehmen.

Dies ist eine hohe Abstraktionsleistung, die Anerkennung verdient. Ist das Kind in der Lage den dritten Schritt auszuführen, hat es den wesentlichen Lernschritt, die Abstraktionsleistung, vollzogen und das Konzept der Mengen und der Rechenoperationen mit diesem Konzept zu einem Teil verinnerlicht.

Wie den meisten anderen Spielen auch, liegt ein Spiel zur Übertragung der enaktiven Ebene auf die ikonische (bildhafte) und symbolische Ebene bei. Meistens handelt es sich um ein Domino. Besser sind grundsätzlich Eigenprodukte der Kinder, also selbst hergestellte Spiele. Dass hier trotzdem ein fertig produziertes Spiel in Form eines Dominos beigelegt wurde, begründet sich in der Praxis der Förderung: Es gibt manchmal einfach nicht genug Zeit und Muße, um ein Eigenprodukt zu erstellen, oder es erscheint aus Effektivitätsgründen nicht ratsam, bei diesem Spiel ein eigenes Produkt zu erstellen. Vielleicht möchte man lieber bei einem anderen Spiel diese Zeit verwenden.

Ein gut geeignetes Eigenprodukt, das das Domino ersetzen kann, ist ein Memory-Spiel. Dazu werden zwanzig Karten benötigt. Fordern Sie das Kind auf, zehn Karten zu erstellen und Sie erstellen die anderen zehn Karten.

Das Kind erstellt die zehn Karten mit den Punktemustern von eins bis zehn Punkten, und Sie erstellen die benötigten zehn Karten mit den Ziffern von Eins bis Zehn (das

Schreiben von Ziffern stellt in der Regel für die Kinder keine besondere Herausforderung und damit auch keinen Lernprozess dar).

Die Karten mit den Punktemustern werden auf der Rückseite mit einem Kreuz gekennzeichnet und die Karten mit den Ziffern mit einem Kreis. Die beiden Kartensorten werden getrennt gelegt. Die Spieler nehmen nun von jeder Sorte je eine Karte und bilden dann Paare, wenn die Ziffer auf der einen Karte die Anzahl der Punkte auf der anderen Karte angibt.

Mit dem Spiel „Hüpf die Zahl“ sind Sie in der Lage den gleichen Lerneffekt mit einem Bewegungsspiel zu erreichen. Bei der Spielerweiterung üben Sie auch noch die Fünfer-Bündelung die im nächsten Kapitel zum Thema wird.

Das Spiel „Lückenfüller“ fokussiert auf die Veranschaulichung der Zehnergänzung. Dieses Spiel hat eine Teilnehmerin des Rechenpate-Projekts entwickelt (Frau Helia Eggert). Ich habe mich dafür begeistert, weil es neben der Zehnerergänzung auch algebraische Früherfahrungen vermittelt und ich der Meinung bin, dass Algebra in der Grundschule durchaus vermittelt werden kann, aber in diesem Bereich leider viel zu wenig passiert. Dieses Spiel zeigt, wie „Early Algebra“ bereits in der ersten Klasse möglich ist.

1.4 Die Fünferbündelung als Strukturierungsmerkmal nutzen – „Zahlenwippe“

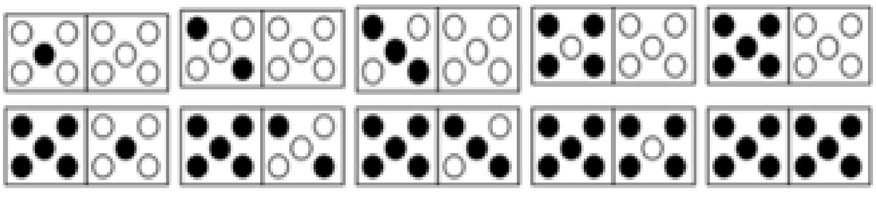
Die Fünferbündelung ist ein besonderes strukturierendes Merkmal der gewählten Würfelmuster-Struktur und besonders förderlich zur Entwicklung eines Konzepts der Menge im Zahlenraum bis Zehn. Daher ist dieses Spiel eigens zur effektiven Nutzung der Fünferbündelung entwickelt worden.

Das Spiel „Zahlenwippe“ beginnt mit einer Wiederholung. Die Fühlekarten werden als Blitzkarten genutzt. Dem Kind werden die Karten kurz (jeweils ein bis zwei Sekunden) gezeigt. Es muss dann sagen, wie viele Punkte sich auf der Karte befinden. Die Zeit ist zum Zählen zu kurz, so dass die Anzahl nur ermittelt werden kann, wenn im Ansatz ein Konzept von der Menge, hier noch rudimentär als ein gemerktes Bild, vorhanden ist. Besonders wichtig ist, dem Kind selbst klar zu machen, dass es sich vom Zählen ablöst. Es spürt einen Erfolg.

Als nächstes werden bei den Blitzkarten die schwarzen und weißen Punkte abgefragt. Die Zehnergänzung wird en passant mitgelernt. Sollte das nicht funktionieren, so sollte nochmals „Zehn gewinnt“ gespielt werden.

Die Technik des effektiven, blinden Erfühlens der Anzahl der Punkte auf den Fühlekarten führt uns zur Fünferbündelung. Dazu wird eine Vorübung praktiziert.

Zunächst werden alle Fühlekarten in aufsteigender Reihenfolge in zwei gleich langen Reihen vom Kind übereinander gelegt.



Dann wird auf die Eins und die Sechs gezeigt und folgende zwei Fragen gestellt:

1. Worin ähneln sich diese beiden Karten in Bezug auf die schwarzen Punkte?

2. Worin unterscheiden sich diese beiden Karten in Bezug auf die schwarzen Punkte?

Die erwartete Antwort ist, dass den beiden Karten gemeinsam der einzelne Punkt auf der einen Seite der Karte ist. Der Unterschied sollte vom Kind als die fehlenden fünf schwarzen Punkte auf der oberen Karte benannt werden. Dann wenden wir uns den nächsten beiden Karten zu (Zwei und Sieben) und stellen dieselben Fragen. Die Antwort sollte die gleiche sein, natürlich bezogen auf die Zwei. Dann kommen die nächsten beiden Karten usw. Nach der Drei und der Acht halten wir inne und fragen das Kind, was wir wohl als nächstes fragen werden. Unser strukturiertes Vorgehen wird vom Kind (hoffentlich) erkannt und die Struktur fortgesetzt, indem es die Frage formuliert und die Antwort dazu liefert. So werden auch die Vier und die Neun sowie die Fünf und die Zehn verglichen.

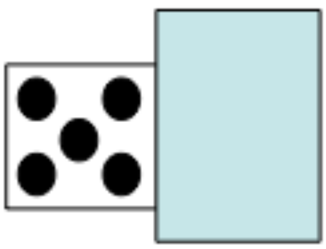
Dann werden, während das Kind die Augen schließt, einzelne Karten (aber immer nur eine) abgedeckt. Das Kind soll erraten, welche Karte sich darunter befindet und erklären, wie es das herausgefunden hat. Letztlich sind zwei Vorgehensweisen vom Kind zu begründen: 1. die Ableitung der abgedeckten Karte durch die Karten rechts und links und 2. durch die Karte darunter bzw. darüber.

Hat das Kind die Struktur erfasst werden die Karten erneut verdeckt. Die Abdeckung wird diesmal liegen gelassen, bis alle Karten abgedeckt sind und das Kind alle Fragen nach den Karten beantwortet hat. Auf dem Tisch liegen nun zehn abgedeckte Karten und das Kind sollte in der Lage sein jede Karte zu benennen und die Benennung zu begründen. Es hat nun die Struktur erfasst und ist nicht mehr auf den konkreten Inhalt einer Karte angewiesen. Aus der Kenntnis der Struktur ist jede konkrete Darstellung der Karte ableitbar.

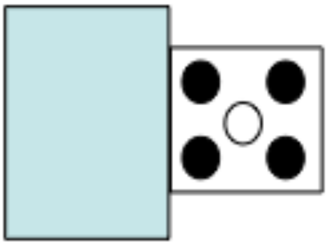
Hier wird das Kind erkennen, was für eine Macht sich aus der Kenntnis von Struktur ableitet! Darauf sollte explizit hingewiesen werden, natürlich im konkreten mathematischen Kontext.

Die Frage nach dem Lösungsweg und die Begründung von Vorgehensweisen sind eine durchgehende Methode durch alle Spiele. Damit soll die Abstraktionsfähigkeit, die Reflexionsfähigkeit und die Ausbildung einer Fachsprache gefördert werden.

Nun nehmen wir uns eine Fühlekarte, die auf beiden Seiten Punkte hat, z.B. die Acht. Das Kind darf nicht sehen welche Karte wir besitzen. Jetzt decken wir die drei Punkte der einen Seite ab. Das Kind sieht nur die fünf Punkte der einen Seite, die andere Seite sieht es nicht



und fragen: „Welche Zahl oder welche Zahlen könnte diese Karte darstellen?“ Die erwartete Antwort ist: 5,6,7,8,9 oder 10. Nach der Antwort wird wieder nach der Begründung gefragt. Dann wird eine weitere Karte mit Punkten auf beiden Seiten genommen, z.B. die Neun. Diesmal wird die Seite mit den fünf Punkten abgedeckt. Dabei bleiben die vier Punkte der anderen Seite sichtbar,



und die Karte wird wieder dem Kind gezeigt. Es wird wieder dieselbe Frage gestellt und nach der Antwort die Frage nach der Begründung gestellt. Die erwartete Antwort ist diesmal Fünf.

Es sollte darüber gesprochen werden, inwiefern diese beiden Beispiele helfen, effektiv die Karte unter dem Tuch zu erfühlen, wie es im Spiel „Zahlenwippe“ erforderlich ist, z.B „Wenn ich links fünf Punkte erfühle, welche Karte kann das sein?“ oder „Wenn ich rechts vier Punkte erfühle, welche Karte kann es sein?“ usw. Die beiden vorgestellten Techniken zur Nutzung der Fünferbündelung zur Ermittlung der Gesamtmenge der Punkte, sollten geübt werden. Dazu dient das Spiel „Zahlgefühl“.

Das Spiel „Zahlenwippe“ ist ein sehr einfaches und sehr wirkungsvolles Spiel zur Verdeutlichung der Fünferbündelung.

Kapitel 2: Rechnen mit dem Konzept der Menge

2.1 Addition und Subtraktion mit dem Konzept der Menge – „Würfelschranke“

Addition und Subtraktion waren bereits das Thema bei „Zehn gewinnt“. Das Spiel „Würfelschranke“ unterstreicht und verstärkt diesen Fokus noch mehr. Jedoch wird die starre Struktur, die bei dem Spiel „Zehn gewinnt“ eingeführt wurde und dort als Stütze gedacht war, aufgelöst. Konkret geschieht dies in dem das Spielfeld keine festen Plätze für die Spielchips vorsieht.

Starre Strukturen dienen in einer bestimmten Phase als Stütze, erweisen sich jedoch in fortgeschrittenen Phasen als Einengung und müssen aufgelöst werden, um Erweiterung zu ermöglichen. Dies geschieht in diesem Spiel.

Sichtbar ist dies darin, dass auf dem Spielfeld keine vorgegebene Würfelstruktur erscheint, die Spielsteine aber trotzdem in der Würfelstruktur gelegt werden müssen. Das kann nur gelingen, wenn die Würfelstruktur verinnerlicht ist. Zudem sitzen sich bei diesem Spiel die Spieler gegenüber. Daher sieht jeder beim anderen die Fünferbündelung auf der anderen Seite.

Hier wird das Bild der Zahlen über Fünf flexibilisiert, indem der „Fünfer“ mal auf der rechten und mal auf der linken Seite auftaucht (Zur Erinnerung: bei „Zehn gewinnt“ war der „Fünfer“ immer links). Bei diesem Spiel ist es auch erlaubt, die Acht als Vier-und-Vier und die Sechs als Drei-und-Drei zu legen, wenn das Kind es will.

Wir sollten uns nur davon überzeugen, dass die Acht und die Sechs ebenfalls mit der Fünferbündelung bekannt sind. Der Grund dafür ist der, dass einigen Kindern die häufige Fünferbündelung zu langweilig ist und sie ihre Kreativität entfalten wollen. Das wollen wir auf keinen Fall blockieren, im Gegenteil.

Dieses Spiel vermittelt das Teile-Teile-Ganzes-Konzept (Rechnen mit Mengen) als Grundlage für die Addition und Subtraktion. Die Rechenoperationen werden auf dieser Grundlage leicht gelernt. Aus der Tatsache dass die Acht aus Drei und Fünf besteht kann das Kind sowohl das Ergebnis der Addition 5+3=8 als auch Subtraktion 8-3=5 ableiten. Grundlage für beide Rechenoperationen ist das Konzept der Menge. (Zur Erinnerung: Mit dem Konzept der Perlenschnur hat sich das ganz anders dargestellt). Es sind nur verschiedene Blickwinkel auf dieselbe Sache. Diese Tatsache wird mit dem Domino weiter vertieft.

Auf dem Domino befinden sich Würfelbilder mit roten und blauen Punkten. Die Interpretationen dieser Abbildungen sind höchst abstrakt und fallen Kindern oft schwer. Daher muss darauf intensiv eingegangen werden.

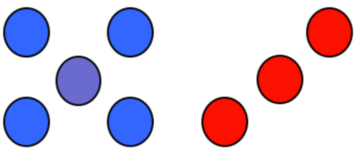
Die Abstraktionsleistung besteht in der Klassifizierung der Punkte und dem dazu notwendigen Einbezug bzw. der Nichtbeachtung der Farbe der Punkte. Auf jeder Abbildung auf den Dominokarten befindet sich eine Gesamtzahl an Punkten. Bei der Ermittlung der Gesamtzahl der Punkte wird die Farbe nicht beachtet. Dies ist hierarchisch die obere Ebene.

Die Gesamtzahl der Punkte teilt sich in rote und blaue Punkte. Hier ist die Beachtung der Farbe der Punkte notwendig, es handelt sich um eine hierarchisch untergeordnete Ebene.

Es gibt also zwei Kategorien: Die Gesamtzahl, bei die Farbe nicht beachtet wird und die die obere Hierarchieebene bildet, sowie die Anzahl der roten bzw. blauen Punkte, bei der die Farbe bedeutend ist und die die untere Hierarchieebene bildet. Ohne die Abstraktion von den Merkmalen und der Hierarchiebildung ist das Muster nicht als Darstellung von Addition und Subtraktion deutbar.

Natürlich können wir das dem Kind nicht so vermitteln, daher verfahren wir ganz konkret mit den Wendeplättchen wie folgt:

Wir legen die Dominokarte mit fünf blauen und drei roten Punkten (bitte die entsprechende Karte auswählen) auf den Tisch und eröffnen dem Kind, dass wir jetzt erklären werden, was diese bunten Punkte bedeuten. Auf der Domino-Karte ist folgendes Würfelmuster zu erkennen:



Es muss auch transparent gemacht werden, dass die auf der Karte befindliche Ziffer in diesem Zusammenhang keine Bedeutung hat, nur das Punktemuster. Neben die Karte legen wir acht Wendeplättchen mit der blauen Seite nach oben in der Würfelstruktur. Wir klären kurz, dass es sich um acht blaue Punkte handelt. Dann drehen wir drei Plättchen um, die rot werden (Auf dem Tisch liegt das im Bild dargestellte Würfelmuster) und sagen: „Diese drei roten Plättchen werde ich gleich wegnehmen. Damit das erkennbar wird habe ich sie rot gemacht.“. Jetzt stellen wir folgende drei Fragen:

1. Wie viele Plättchen liegen insgesamt?
2. Wie viele Plättchen werde ich wegnehmen?
3. Wie viele Plättchen werden übrig bleiben?

Die drei Zahlen, die als Antwort auf die drei Fragen genannt werden, sind die Zahlen, die an das zweifarbige Würfelmuster auf der Dominokarte angelegt werden dürfen. Genaueres zu den Spielregeln erfahren Sie aus der Spielanleitung zum Spiel „Würfelschranke“.

2.2 Subtraktion als Differenz- „Zauberzahl, Trimon und Plusminus“

In einer bekannten Untersuchung von Herrn Dr. Hasemann stellte er Kindern folgende zwei Fragen:

1. Fünf Spatzen finden drei Würmer. Wie viele Spatzen gehen leer aus?
2. Fünf Spatzen finden drei Würmer. Wie viele Spatzen gibt es mehr als Würmer?

Die erste Frage wurde von 90% der Kinder richtig beantwortet, die zweite Frage nur von 20% der Kinder. Dies beeindruckt, weil die Aufgaben in ihrer symbolischen Notation identisch sind: 5-3=2. Die symbolische Notation wird offenbar nur mit einer ganz bestimmten Sichtweise der Handlung (Hasemann 2003) verbunden.

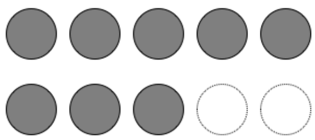
Die erste Frage bezieht sich auf die Vorstellung von der sukzessiven Subtraktion, also Subtraktion als Wegnehmen. Diese Vorstellung ist bei den Kindern vorhanden, vermutlich aufgrund von Alltagserfahrungen, die dieser Handlung entsprechen.

Die zweite Frage bezieht sich auf den Vergleich zweier Mengen und der Ermittlung der Differenz. Hier scheinen die Kinder auf keine Alltagserfahrungen zugreifen zu können. In der Schule wurde Ihnen offenbar keine Vorstellung von der Subtraktion als Differenz vermittelt, so dass hier eine leere Stelle in der Vorstellungswelt der Kinder ist.

Zum Aufbau einer Vorstellung von der Subtraktion als Differenz ist das Spiel „Zauberzahl“ gedacht. Da für die Veranschaulichung der Differenz das Würfelmuster schlecht geeignet ist, wurde hier die Veranschaulichung durch eine Reihe vorgenommen. Alle Erfahrung zeigt, dass dieser Vorteil durch den bereits oben beschriebenen Nachteil erkauft wird, dass die Kinder die Anzahl zählend ermitteln. Die in einer Reihe liegenden Spielfiguren verleiten, wie bereits bei „Zehn gewinnt“ erläutert, zum Zählen. Trotzdem wurde diese Anordnung gewählt, da die Visualisierung der Differenz durch diese Anordnung gut gelingt.

Das Spiel Zauberzahl führt zur Darstellung verschiedener Mengen und fordert auf die Mengen zu vergleichen. Im Anschluss an jeden Spielzug wird die Differenz ermittelt und in Form eines Spielprotokolls notiert.

Folgende Spielsituation soll hier exemplarisch gezeigt werden. Auf der einen Reihe des Sielfeldes „Zauberzahl“ liegen fünf Chips und auf der anderen nur drei. Dieses Beispiel wurde so gewählt, dass der dargestellte Mengenvergleich als eine mögliche Veranschaulichung zur Lösung der weiter oben genannten Frage von Herrn Hasemann dienen kann.



Wenn Kinder in der Lage sind die oben dargestellte Frage von Herrn Hasemann in ein solches Bild zu übersetzen, haben Sie einen mathematischen Zugang zur Beantwortung gefunden. Sie müssen die Fünf Spatzen in der Vorstellung als fünf Punkte sehen (obere Reihe) und die drei Würmer als drei Punkte (unten). Mit diesem Bild kann ein quantitativer Vergleich durchgeführt werden und die Differenz sehr einfach als zwei (gestrichelte Kreise) ermittelt werden. Was jetzt noch fehlt ist die mathematische Notation mit Zahlen und Rechenzeichen:

5 – 3 = 2

Die Veranschaulichung der Differenz mit zwei Punktereihen ist gut geeignet jedoch in mathematischen Lehrbüchern nur selten vorzufinden. Sehr viel häufiger findet sich eine sehr viel kompaktere und damit auch abstraktere Veranschaulichung:

Die Unterscheidung der Mengen 5 und 3 erfolgt nicht mehr anhand ihrer Lage, sondern durch farbliche Kennzeichnung. Die 5 wird in der Menge aller Punkte, ungeachtet ihrer Farbe, erkannt, die 3 in der Menge der blauen Punkte und die Differenz, in diesem Fall die 2, wird in der Menge der roten Punkte erkannt. Die mathematische Notation ist hier natürlich die gleiche wie oben:

5 – 3 = 2

Allerdings ist in der zweiten, farbigen Darstellung auch eine andere Mathematische Interpretation möglich:

5 – 2 = 3

In diesem Fall wird die zweite Zahl in der Menge der roten Punkte gesehen und die Differenz in der Menge der blauen Punkte. Wird das Spiel „Zauberzahl“ mit Wendechips und nur einer Reihe gespielt, so wird diese Darstellung der Differenz gelernt.

Das Erkennen der drei Zahlen, im Beispiel 5, 3 und 2, in der farbigen Anordnung von Punkten ist Gegenstand des Spiels Trimon.

Das Spiel „Plusminus“ wendet sich einer Anwendung der in diesem Kapitel erworbenen Konzepte bzw. Vorstellungen bei sog. Lückenaufgaben zu. Diese erweisen sich oftmals als sehr schwierig für Kinder.

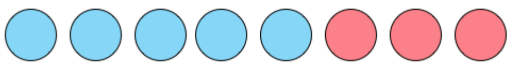
Hier soll dargestellt werden, welche Vorstellungen – die bereits mit den oben dargestellten Spielen ausgebildet wurden – bei der Lösung der Aufgaben hilfreich sein können.

8 – 3 = □

Zur Lösung dieser Aufgabe kann die im Spiel „Würfelschranke“ gelernte Veranschaulichung durch eine Handlung, nämlich dem Entfernen gewählt werden. In der Vorstellung werden von einer Menge von 8 Punkten 3 Punkte entfernt.

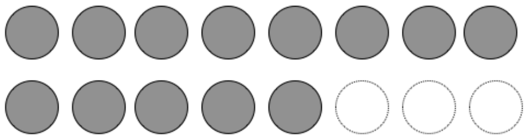
8 - □ = 5

Die Vorstellung des Entfernens ist hier wenig hilfreich, da nicht angegeben ist welche Menge entfernt werden soll. Da die mit dem Spiel „Würfelschranke“ vermittelten Veranschaulichungen der Rechenoperationen zur Lösung dieser Aufgabe nicht zielführend sind, werden die im Spiel „Zauberzahl“ gelernte Veranschaulichung gewählt. In der Darstellung in einer Reihe mit zwei Farben könnte das so aussehen:



Insgesamt sind es – ohne Berücksichtigung der Farbe – 8 Punkte, davon sind 3 rot. Die Frage nach der Anzahl der blauen Punkte beantwortet die Frage nach der Zahl in der Leerstelle (dem „Kästchen“) der Aufgabe.

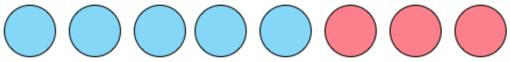
Sollen die Punkte in zwei Reihen veranschaulicht werden, so könnte die Vorstellung so aussehen:



Beide Bilder bzw. Veranschaulichungen sind geeignet um die Lösung, d.h. die Zahl in der Leerstelle zu ermitteln.

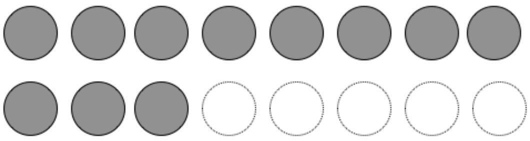
□ - 3 = 5

Auch bei dieser Aufgabe eignet sich eine Veranschaulichung durch die Handlung des Entfernens nicht, denn es nicht klar von welcher Menge entfernt werden soll. Geeignet ist auch hier die Veranschaulichung mit farbigen Punkten.



Die Fragestellung ist jedoch ein wenig anders als oben: Wieviele es insgesamt sind, weiß ich nicht, aber ich weiß dass 3 Punkte rot sind und 5 sind blau (es können natürlich auch 3 Punkte blau sein und 5 rot). Wenn sich Kinder dieses Bild abrufen können, können sie auch anhand dessen die Summe von blauen und roten Punkten bilden und so das Ergebnis ermitteln.

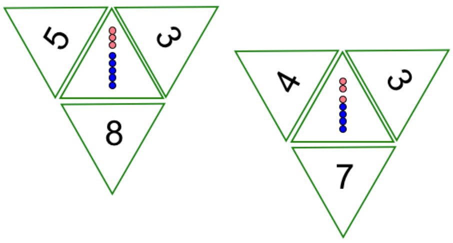
Bei der Veranschaulichung mit zwei Punktereihen könnte folgendes Bild hilfreich sein:



Wenn in der unteren Reihe 3 Chips liegen (grau dargestellt) und die Differenz 5 beträgt (mit gestrichelter Linie dargestellt) dann müssen in der oberen Reihe 8 Chips liegen und das muss die gesuchte Zahl sein.

Das Spiel Trimon übt das Erkennen von Mengen in der zweifarbigen Darstellung einer Punktereihe. Die folgende Punktereihe enthält drei unterscheidbare Mengen:

Um eine Menge zu erkennen werden die roten Punkte fokussiert und die blauen ausgeblendet. Die Menge drei wird dann erkannt. Für die zweite Menge werden die blauen fokussiert und die roten Punkte ausgeblendet. Die Menge 5 wird erkannt. Um die dritte Menge zu erkennen – die Gesamtmenge – muss die Farbe ausgeblendet werden. In kindlicher Sprache würde man sagen, die Punkte bekommen, im Geiste, die gleiche Farbe, z.B. werden sie alle grau. Dann ist leicht zu erkennen dass die dritte Menge die 8 ist. Diese drei Zahlen werden im Rahmen des Spiels Trimon um die zweifarbige Punktereihe begründet angeordnet. Hier ein Beispiel für eine zweifarbige Punktereihe und die Anordnung der drei Zahlen wie sie beim Spiel „Trimon“ vorgenommen wird.



Im Spiel Plusminus werden mit Hilfe eines Würfels Aufgaben mit einer Leerstelle, oftmals als „Kästchenaufgaben bezeichnet, erzeugt. Bei der Lösung können Kinder auf die Veranschaulichungen der Spiele „Würfelschranke“, Zauberzahl“ und „Trimon“ zurückgreifen.

2.3 Zahlen Zerlegen

Dieses Spiel basiert auf der Spielidee von „Shut the Box“. Im Gegensatz zu dem genannten Spiel wurde bei „Räum ab!“ konsequent das dekadische System berücksichtigt, indem ein Zehnerwürfel (statt zwei Sechserwürfel) verwendet wird und die Zahlen von Eins bis Neun auf dem Spielfeld erscheinen und zerlegt werden (im Gegensatz zu den Zahlen eins bis zwölf).

Kapitel 3: Das Konzept der Bündelung kennen lernen

3. Große Mengen darstellen mit dem Konzept der Bündelung

Das Mengenkonzept gerät an seine Grenzen, wenn der Zahlenraum wächst. Die Vorstellung großer Zahlen und das Rechnen mit ihnen sind ohne Bündelung schwer bis unmöglich. Daher hat sich in allen Kulturen das Bündelungsprinzip zur Darstellung großer Zahlen durchgesetzt.

Die Abstraktionsleistung, die in Zusammenhang mit dem Konzept der Bündelung erbracht werden muss besteht darin, dass eine Menge mit einer bestimmten Mächtigkeit zu einer Einheit reduziert wird. Diese Einheit ist zugleich Eins und z.B. Zehn (beim dekadischen System). Der Unterschied besteht lediglich darin, wie wir unsere Gedanken in Bezug auf dieses gedankliche Objekt mal so und mal anders ausrichten. Diese gedankliche Leistung wird unterstützt durch die händische d.h. reale Bündelung von geeignetem Material. Im Rahmen des Spiels werden zehn Spielchips zu einem Turm gestapelt. Aus zehn wird eins, oder noch abstrakter ausgedrückt: Zehn ist eins und eins ist zehn. Hierfür ist das Spiel „Zwanzig gewinnt“ vorgesehen. Das Spielfeld ist identisch mit dem von „Zehn gewinnt“ und „Lückenfüller“.

Zum Rechnen im Zahlenraum bis Hundert ohne Zehnerübergang sind die Spiele „Zahlenhüpfer“ und „Rattenwerfen“ gedacht. Insbesondere bei dem Spiel „Zahlenhüpfer“ lernen Kinder, dass sie Aufgaben wie 85 + 3 und 50 + 30 konzeptionell ähnlich rechnen wie 5 + 3 (sog. Übertragungsleistung). Kinder sind oft überrascht wie einfach die Berechnungen von Aufgaben ohne Zehnerübergang mit Hilfe der hier dargestellten Veranschaulichung gelingt.

Das Rechen mit gebündelten Zahlen über ganze Zehner hinaus wird als Zehnerübergang bezeichnet. Die Verfahrensweise zum Rechnen von Aufgaben mit Zehnerübergang wird im Spiel „Der Turm“ im Zahlenraum bis 20 thematisiert. Das Spiel Kisten überträgt das hier erworbene Wissen und thematisiert Addition und Subtraktion mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 100.

Eine Möglichkeit, die Struktur des dekadisch geordneten Zahlenraums zu erkennen, bietet das Hunderterfeld. An diesem Beispiel bietet sich Kindern die Gelegenheit, eine abstrakte mathematische Struktur kennen zu lernen und über diese zu reflektieren. Daher widmen sich drei Spiele dem Hunderterfeld: „100Feld“ und „Nummero“. Speziell für das Spiel 100Feld wurde ein Hunderterfeld entwickelt das die Entdeckung der dekadischen Struktur erleichtert.

Von der Bündelung führt die Vorstellung großer Zahlen zur Meta-Bündelung (Bündelung der Bündelung). Dies ist lediglich die konsequente Fortführung des Bündelungsprinzips als strukturierendes Merkmal für den großen Zahlenraum.

In vielen Veröffentlichungen wird das Stellenwertsystem und nicht die Bündelung als „Grundkompetenz“ genannt. Ich bin nicht dieser Meinung. Das Stellenwertsystem ist lediglich eine Nomenklatur, also eine Übereinkunft zur Notation von Zahlen, aber es stellt kein Grundkonzept dar.

Es gibt Zahlensysteme, die ohne Stellenwert auskommen, wie z.B. die römischen Zahlen. Dies zeigt, dass das Stellenwertsystem nicht unbedingt notwendig ist. Ein Zahlensystem ohne Bündelung ist aber nicht denkbar. Womit zwar nichts bewiesen ist, sich aber der Verdacht erhärtet, dass das Bündelungsprinzip von übergeordneter Bedeutung ist und daher in diesem Buch als Grundkonzept angesehen wird. Trotzdem ist das Stellenwertsystem als Übereinkunft zur Notation von Zahlen von Bedeutung und wird in diesem Buch als solches behandelt. Ein Spiel zur Einführung ist „500 gewinnt“. Ein Übungsspiel zum Stellenwertsystem ist „Die größte Zahl“.

3.1 Das Bündelungsprinzip kennen lernen- „Zwanzig gewinnt“

Wie auch beim Konzept der Menge das erste Spiel dazu diente, den „Erstkontakt“ zu diesem Konzept herzustellen, wird dies hier mit dem Spiel „Zwanzig gewinnt“ getan

Bei diesem Spiel werden beim Zehnerübergang die zehn Spielsteine zu einem Bündel zusammengefasst bzw. bei der Subtraktion wird der Zehnerbündel entbündelt.

Dies wird handelnd vorgenommen, d.h. das Kind stapelt die Spielsteine selbst zu einem Stapel bzw. zerlegt den Stapel selber in zehn einzelne Spielsteine. Dieses Spiel beinhaltet daher keine fertigen Zehnerbündel sondern stapelbare Spielsteine.

Das Bündel wird immer links vom Spielfeld positioniert (das Spielfeld ist identisch mit „Zehn gewinnt“), so wie bei der Notation die Ziffer, die den Zehner bezeichnet, ebenfalls links steht.

Die Tatsache, dass gleiche Ziffern unterschiedliches bedeuten, je nachdem auf welcher Position sie stehen, sollte unbedingt in einem Gespräch thematisiert und dem Kind bewusst gemacht werden.

3.2 Rechnen im Hunderterraum innerhalb eines Zehners und Rechnen mit Zehnern - „Zahlenhüpfer“

Das Spiel „Zahlenhüpfer“ ähnelt sehr stark dem Spiel „Würfelschranke“. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass das Rechnen im Zehner, innerhalb des Hunderterraums, dem Rechnen im Zahlenraum bis Zehn sehr ähnelt. Diese Ähnlichkeit zu entdecken ist für das Kind das Ziel dieses Spiels.

Zu Beginn des Spiels wird der Zehner bestimmt, innerhalb dessen die Spieler rechnen werden. Bei jeder Spielrunde wird ein anderer Zehnerraum gewählt.

Beim Spielen wird nach und nach die dekadische Struktur des Zahlenraums bis Hundert erkennbar. Die Kinder lernen vom konkreten Zehnerraum zu abstrahieren und unabhängig von diesem, wie im Zahlenraum bis Zehn, zu rechnen. Letztlich soll es ihnen egal sein ob sie 75+3 oder 35+3 rechnen. Sie sollen die Grundaufgabe 5+3 in diesen Aufgaben erkennen und als solche lösen. Der neue Aufgabentyp wird in die vorhandene Struktur des Zahlenraums bis Zehn eingebettet und mit Hilfe dieser Struktur gelöst.

Beim Spiel mit Zehnerstangen werden nur Zehnerstangen hinzugefügt und entfernt. Dabei sollen die Kinder, ganz ähnlich wie oben, von der konkreten Aufgabe 50+30 auf die entsprechende Aufgabe im Zahlenraum bis Zehn (5+3) abstrahieren und die dort gebildete Struktur als Lösungshilfe nutzen. Besonders bei dem Spiel „Zahlenhüpfer“ wird die Bedeutung der Abstraktion offensichtlich.

Rein mathematisch fügt dieses Spiel kein neues Wissen hinzu. Lediglich die Erkenntnis der dekadischen Struktur führt zur Fähigkeit, die Rechenoperationen effektiv auszuführen. Die Erkenntnis der Struktur als eine Abstraktionsleistung wird die Kinder dazu führen Aufgaben im höheren Zahlenraum mit Leichtigkeit auszuführen, wie z.B. 5000 + 3000.

Das im Spiel enthaltene Kartenspiel überträgt diese Erkenntnis auf die symbolische Ebene. Das Kartenspiel sollte nach und nach durch eigene Dreiersets des Kindes ersetzt werden, d.h. wenn die Struktur vom Kind erkannt wurde, soll es eigene Beispiele dieser Struktur produzieren. Damit ist ein Reflexionsvorgang angebahnt, der dem Kind die eigene Erkenntnis der Struktur vor Augen führt. Die üblichen Fragen, „wie hast du das gemacht?“, oder „wie kommst du darauf?“, vertiefen den Reflektionsvorgang.

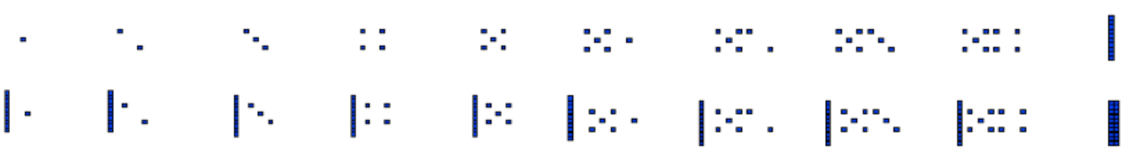
Das Spiel „Rattenwerfen“ veranschaulicht nicht nur die Addition und Subtraktion im Hunderterraum sondern auch die Hundertererergänzung. Dieses Spiel kann auch rückwärts gespielt werden und thematisiert dadurch die Subtraktion mit Zehnerübergang im Hunderterraum.

Das Spiel „Rattenwerfen 100“ enthält eine Erweiterung in den Zahlenraum bis Tausend.

Kapitel 4: Die dekadische Struktur des Zahlenraums – „100Feld, Nummero, Rattenwerfen“

Das Spiel „100Feld“ bedarf einer Einführung die 30 bis 45 min dauert und dem Kind die Grundstruktur des Hunderterfeldes veranschaulicht. Die Vorgehensweise ähnelt der bei der Einführung des Spiels „Zahlenwippe“

Das Kind wird aufgefordert die Zahlen Eins bis Zehn mit Dines-Material in einer Reihe zu legen. Danach soll es die weiteren Zahlen in einer Reihe darunter legen:



Alternativ kann auch das Hunderterfeld bis auf die oberste Reihe abgedeckt werden. Dann wird auch die zweite Reihe sichtbar gemacht. Die Vorgehensweise ist identisch.

Jetzt lenken wir die Aufmerksamkeit des Kindes auf die Zahlen Eins und Elf und stellen zwei Fragen, die dem Kind schon aus dem Spiel „Zahlenwippe“ vertraut sind:

1. Worin ähneln sich diese beiden Darstellungen, was haben sie gemeinsam?

2. Worin unterscheiden sich diese beiden Mengen?

Dann lenken wir die Aufmerksamkeit auf die Zwei und die Zwölf und fragen nochmals usw. bis die Struktur verstanden ist. Dann decken wir eine Zahl mit einem Zettel ab und fragen nach der abgedeckten Zahl. Auch hier fragen wir nach den beiden (mind. zwei) Möglichkeiten, die verdeckte Zahl zu ermitteln. Der Zettel wird auf immer wieder andere Zahlen gelegt.

Dann wird der Zettel auf die fiktive dritte Reihe (fiktiv deshalb, weil sie ja noch abgedeckt ist) unter die Elf gelegt und nach der Zahl gefragt, die sich dort befinden könnte. Der Zettel wird dann in die dritte Reihe verschoben und weiter gefragt. Dann wird der Zettel in die fiktive vierte Reihe gelegt und verschoben. Vielleicht wird noch in der fünften Reihe nachgefragt, doch die Struktur dürfte dem Kind langsam geläufig sein. Natürlich wird der Vorgang durch unsere Fragen begleitet und ständig reflektiert.

Im Spiel „Zahlenwippe" haben wir eine abstrakte Struktur geschaffen, auf die das Kind bei oben genannter Einführung in das Hunderterfeld zurückgreifen kann. Hier zeigt sich die Effizienz abstrakter Strukturen in ihrer Übertragbarkeit auf verschiedene konkrete Kontexte.

Nach dieser Einführung kann das Spiel „100Feld" gespielt werden. Dieses Spiel löst die konkrete Darstellung des Hunderterfeldes nach und nach auf und ersetzt sie durch die Vorstellung des Kindes. In der dritten Stufe wird z.B. mit einem leeren Hunderterfeld gespielt. Und als letzte Stufe wird kein Feld mehr benötigt. Das Hunderterfeld ist als Struktur der Beziehungen der Zahlen zueinander abstrahiert und wird in der konkreten Form nicht mehr benötigt.

Das Spiel „Nummero" ist sehr beliebt und vermittelt differenzierte Kenntnisse zum 100er Feld aufbauend auf dem gleichnamigen Spiel.

Das Spiel „Rattenwerfen" bezieht seine Attraktivität zum großen Teil von den verwendeten Plüschtieren. Diese haben eine sehr motivierende Wirkung auf Kinder. Bei diesem Spiel wird Dines-Material auf eine Hunderterfeld gelegt, so dass nicht nur die Zahldarstellung visualisiert wird, sondern auch der Hunderterrest. Z.B. lernen Kinder, dass die 87 sehr nahe an der Hundert liegt und nur noch 12 fehlen um die Hundert zu erreichen. Sie erkennen, dass das bei der 27 schon ganz anders aussieht. Das Spiel kann aufsteigend, beginnend bei der 0, oder absteigend beginnend bei der 100 gespielt werden. Selbstverständlich werden die Spielzüge schriftlich notiert.

Mit der Spielerweiterung des Spiels „Rattenwerfen" wird die Addition und die Subtraktion im Zahlenraum bis Tausend geübt. Dieses Spiel übt zudem noch die Vorstellung von der Tausenderergänzung.

Kapitel 5: Rechnen mit gebündelten Zahlen

5.1 Der Zehnerübergang – „Der Turm"

Für den Zehnerübergang wird hier das in der AV Rechenstörungen Berlin Brandenburg empfohlene Verfahren des schrittweisen Rechnens eingeführt. Es ist für alle Aufgaben geeignet und auf den höheren Zahlenraum übertragbar. Die Vorteile des Schrittweisen Rechnens kommen ganz besonders bei der Subtraktion im Zahlenraum bis Hundert zum tragen (Benz 2007).

In diesem Zusammenhang möchte ich kurz zum sog. vorteilhaften Rechnen Stellung beziehen. Da das schrittweise Rechnen den Kindern ermöglicht, alle Aufgaben mit Zehnerübergang mit nur einem Verfahren mühelos zu lösen, erschließt sich mir nicht, worin der Vorteil des sog. vorteilhaften Rechnens bestehen soll. Vielmehr handelt es sich in meinen Augen um alternative Verfahren, die ein hohes kreatives Potential enthalten und die Phantasie des Kindes anregen. Daher empfehle ich im Anschluss an die Erarbeitung des schrittweisen Rechnens, wenn die Kindern die Sicherheit gewonnen haben, jede Aufgabe mit Zehnerübergang mühelos lösen zu können, auch diese alternativen Verfahren zu analysieren. Dabei wird es vor allem darum gehen zu ergründen, warum sie funktionieren, also welche (abstrakte) Struktur ihnen zugrunde liegt.

Das Spiel „Der Turm" thematisiert nur die Addition im Zehnerübergang, da die Subtraktion, ausnahmsweise, einfacher ist. Die Subtraktion gelingt im Anschluss an die Addition relativ mühelos und wird mit Aufgaben erarbeitet.

Für das schrittweise Rechnen sind folgende drei Schritte notwendig, die auch im Spiel intensiv geübt werden und hier am Beispiel 7+8 erläutert werden:

1. Ermittlung der Zehnerergänzung:

Die Zehnergänzung wurde im Spiel „Zehn gewinnt" und „Zahlenwippe" intensiv geübt. Beispiel: Zehnerergänzung von 7 ist 3

2. Auffüllen des Zehners und Ermittlung des Restbetrags:

Die Teilung der Zahlen wurde im Spiel „Würfelschranke", Zauberzahl" und „Räum ab" intensiv geübt.

Beispiel: Wenn ich von Acht Drei entferne, bleiben Fünf übrig.

3. Hinzufügen des Restbetrags zum Zehner und Ermittlung des Ergebnisses. Beispiel: 10+5=15

Alle drei Schritte sind bereits gelernt und geübt worden und sollten jedes für sich kein Problem mehr darstellen. Im schrittweisen Rechnen werden sie lediglich zusammengefügt und mit der Bezeichnung „Zehnerübergang" versehen.

Mathematisch geschieht also beim Zehnerübergang nichts neues, lediglich auf der abstrakten Ebene müssen drei bereits bekannte Rechenschritte zu einem Vorgang vereint bzw. gebündelt werden. Hier geschieht eine Bündelung offenbar auf einer Meta-Ebene: Nicht nur Zahlen können gebündelt werden sondern auch Rechenschritte.

Das Spiel „Der Turm" fokussiert die Schritte 1 und 2 auf der enaktiven Ebene. Das Domino fügt Schritt 3 auf der symbolischen Ebene hinzu. Aufgabenkarten (als Download) sind zum Üben vorhanden.

Sollte den Kindern entweder Schritt 1 (Zehnergänzung) oder 2 (Zerlegen der Zahlen) noch schwer fallen, so können die entsprechenden Spiele zur Wiederholung nochmals gespielt werden („Zehn gewinnt", „Zahlenwippe", „Würfelschranke", „Räum ab!")

Folgende Rechnung soll die Notwendigkeit der Kenntnis der Zehnerergänzung und der Zahlzerlegung darstellen:

Aufgabe:	7 + 8 =	Die 3 ist die Zehnerergänzung der 7
Lösungsschritte:	7 + 3 = 10 10 + 5 = 15	
Lösung:	7 + 8 = 15	Zahlzerlegung: Werden von der 8 Drei entfernt (um die 10 zu ergänzen), so bleiben 5

5.2 Rechnen im Zahlenraum bis Hundert und bis Tausend mit Zehnerübergang – „Kisten“

Im Spiel „Kisten“ werden sowohl auf der enaktiven als auch auf der symbolischen Ebene Rechnungen mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis Hundert ausgeführt.

Das Spiel „Kisten“ kann nicht nur im Hunderterraum von Null bis Hundert, sondern auch im Hunderterraum von Hundert bis Zweihundert oder von Zweihundert bis Dreihundert usw. gespielt werden. Dazu wird auf das Spielfeld Dines-Material (in der Förderbox enthalten) aus Holz hinzugefügt oder entfernt. Dabei muss evtl. gebündelt und entbündelt werden. Die Handlungen des Hinzufügens und Entfernens werden als Addition oder Subtraktion notiert. Spielerisch werden zweistellige Zahlen mit Zehnerübergang addiert.

Kapitel 6: Das Stellenwertsystem kennen lernen

6.1 Das Stellenwertsystem kennen lernen und Rechnen mit dreistelligen Zahlen – „500 gewinnt“

Das Stellenwertsystem spielt in dem hier vorgestellten Konzept eine untergeordnete Rolle, da es lediglich ein Notationssystem ist, also eine Übereinkunft in der Schreibweise großer Zahlen.

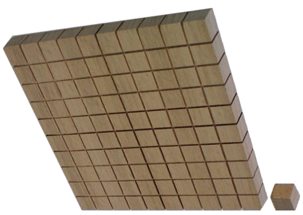
Dass das Stellenwertsystem zum Verständnis von Zahlen nicht unbedingt notwendig ist, zeigt das römische Zahlen- und Notationssystem, welches nicht auf dem Stellenwert beruht: z.B. unterscheidet sich in der römischen Notation die Zahl Tausend von der Hundert durch das gewählte Symbol – einem Buchstaben - und nicht durch die Stelle, an der der Buchstabe steht. Das Stellenwertsystem ist dem römischen Notationssystem bezüglich der Effektivität überlegen, dafür ist das Stellenwertsystem, meiner Meinung nach, nicht so anschaulich. Beide Systeme beruhen jedoch auf dem Bündelungsprinzip, was ich für die wesentliche Erkenntnis halte. Dennoch ist es für Kinder wichtig, Zahlen lesen und schreiben zu können.

Das Stellenwertsystem ist ausschließlich den geschriebenen Zahlen vorbehalten. Teilen wir eine Zahl mündlich mit, so benennen wir die Bündelungseinheiten mit ihrem Wert. Der Wert einer Ziffer in der Zahl wird in der Mündlichkeit nicht durch ihre Stelle mitgeteilt, sondern konkret benannt, z.B.Drei**tausend**fünf**hundert**.

Ein Kind, das eine Zahl sprechen kann, ist also deswegen nicht unbedingt in der Lage diese Zahl zu schreiben. Anders gesagt: eine mündlich genannte Zahl enthält keine Hinweise auf das Stellenwertsystem.

Legen Kinder Zahlen mit Dines-Material, so lassen sie in der Regel keine Lücke für eine nicht belegte Stelle (als Ziffer wäre das eine „0“). Daher können wir nicht davon ausgehen, dass Kinder, die eine Zahl mit Dines-Material legen, diese auch im Stellenwertsystem notieren können.

Als Lerntherapeut habe ich beispielsweise folgendes erlebt: Ein Kind hat die Zahl 101 mit Dines-Material



gelegt und mündlich richtig als „hunderteins“ bezeichnet.

Schriftlich wurde dies als 1001 (hundert-eins) notiert. Vom Standpunkt der Bündelung und als direkte Übersetzung der mündlichen Benennung in die Schriftlichkeit ist diese Schreibweise richtig, denn es wurde eine „100“ und eine „1“ gelegt, zusammen 1001 („Hunderteins“). Es fehlt die Kenntnis der Notation im Stellenwertsystem, um dies als 101 zu beschreiben.

Voraussetzung für die Erarbeitung des Stellenwertsystems ist die Kenntnis des Bündelungsprinzips als abstraktes Konzept, wie es im Spiel „20 gewinnt“ eingeführt wird.

Das Spiel „500 gewinnt“ holt die Kinder beim Legen des Dines-Materials ab. Die Fähigkeit dreistellige Zahlen mit Dines-Material zu legen kann als Voraussetzung für den Einsatz des Lernspiels „500 gewinnt“ bezeichnet werden. Indem den Materialien feste Stellen zugewiesen werden, wird die leere Stelle, d.h. der Einsatz der Null eingeführt. Die Notation mit Zahlen, durch legen von Ziffernkarten, ordnet den gelegten Materialien – vor allem der leeren Stelle – eine Ziffer zu.

Das Legen von Dines-Material kann nach und nach entfallen. Wie beim in der Schule üblichen Stellenwertsystem werden die Stellenwerte dann mit den Buchstaben „H“, „Z“, und „E“ bezeichnet.

6.2 Große Zahlen benennen – „Die größte Zahl“

Das Spiel „Die größte Zahl“ übt das Stellenwertsystem sowie die Benennung großer Zahlen im elfstelligen Zahlenraum. Durch Verwendung nur eines Teils der Spielfelder kann das Spiel bereits im dreistelligen und vierstelligen Zahlenraum verwendet werden. Im Laufe des Spiels werden auf das Spielfeld (eine Vorlage mit elf Feldern zum Legen von Karten) Ziffernkarten gelegt. Mit jeder Ziffernkarte die gelegt wird, soll der Spieler den Stellenwert dieser Ziffer benennen. Wird eine 3 auf die Zehntausenderstelle gelegt, so könnte er z.B. sagen: „ Diese 3 ist hier dreißigtausen wert“. Hat jeder Spieler elf Ziffernkarten gelegt, so werden die elfstelligen Zahlen vorgelesen. Die größte Zahl gewinnt.

Dieses Spiel kann auch verwendet werden um die Zählkompetenz zu erweitern und einfache Additionen ohne Zehnerübergang im großen, elfstelligen Zahlenraum zu üben: Wenn das Spiel „Die größte Zahl“ beendet ist, liegt vor jedem Spieler eine elfstellige Zahl. Nun wählt man eine Stelle mit einer möglichst niedrigen Ziffer aus und erhöht diese schrittweise um Eins. Man kann dabei auch um den Tisch laufen. Mit jedem Schritt wird die vollständige (!) Zahl benannt. Wird die Ziffer Neun erreicht endet das Zählen und man spielt eine neue Runde „Die größte Zahl“ oder wählt eine andere Stelle und erhöht diese schrittweise um Eins und benennt mit jedem Schritt die ganze Zahl. Das Erhphen findet nicht real statt, sondern nur im Geiste also gedacht.

Das Benennen großer, elfstelliger Zahlen fällt Kindern anfangs schwer, aber mit etwas Übung wird es einfacher gehen und sie sind sehr stolz, wenn es ihnen flüssig gelingt.

Eine einfache Additionsaufgabe kann ebenfalls an eine Spielrunde angehängt werden. Liegt nach Beendigung der Spielrunde die elfstellige Zahl vor den Spielern, so wird eine Zahl addiert, die dem Fortschreiten um einen Schritt, wie oben dargestellt, entspricht (z.B.: „Addiere bitte Einhundertmillionen“). Als Ergebnis wird wieder die vollständige elfstellige Zahl (!) genannt. Die zu addierende Zahl kann nach und nach erhöht werden, sollte jedoch außer der ersten Ziffer nur Nullen enthalten und es sollte kein Zehnerübergang erfolgen.

Kapitel 7. Die Fördersituation

Damit die Lernspiele ihre volle Wirkung entfalten können, sollten sie in eine lernförderliche Atmosphäre eingebettet sein. Dazu dienen die folgenden Erläuterungen

7.1 Transparenz

Wird ein neues Lernspiel bzw. ein neues Material eingeführt, so wird dieses erst einmal ausführlich begutachtet. Alle Teile des Spiels werden betrachtet und es wird geklärt, welche Bedeutung sie haben und Verständnisfragen geklärt. Dies gilt grundsätzlich für alle Materialien, die in der Fördersituation eingesetzt werden. Dies soll den Kindern Sicherheit geben. Sie sollen merken, dass keine Überraschungen geplant sind. Gerade Kinder, die schlechte Erfahrungen mit Mathematik gemacht haben, lieben diese Überraschungen nicht sehr.

7.2 Zeit

Wie bereits weiter oben dargelegt, wird in der Fördersituation das Familiensetting nachgestellt. Damit ist das Familiensetting des bildungsbürgerlichen Milieus gemeint.

Um dies zu erreichen sollten wir davon ausgehen, dass Zeit keine Rolle spielt. Es ist soviel Zeit vorhanden wie benötigt wird. Das bedeutet, dass wir uns mit mathematischen Prozeduren und Darstellungen sehr differenziert auseinandersetzen können. Wenn Schwierigkeiten auftreten, widmen wir uns diesen in aller Ruhe und bis alles verstanden ist.

Das bedeutet natürlich, dass wir uns vom Tagesgeschehen der Schule abkoppeln müssen, wo sehr oft Zeitknappheit herrscht: Die nächste Klassenarbeit steht an, eine Hausaufgabe muss abgegeben werden, etc. Zeitstress hat in der Fördersituation nichts zu suchen.

7.3 Positive Atmosphäre

Von größter Bedeutung für die Fördersituation ist die positive Atmosphäre. Daraus leitet sich zwingend ab, dass nur Kinder gefördert werden, die freiwillig in die Förderung kommen. Natürlich kann der Förderlehrer motivierend tätig werden, aber letztlich bleibt es dabei: Gefördert werden nur Kinder, die gefördert werden wollen.

Meine Erfahrung geht dahin, dass gerade an den Schulen Kinder mit Beginn der Fördertätigkeit zurückhaltend gegenüber der Förderung sind. Wenn sie aber erst einmal bemerken, dass die Förderung sehr viel Spaß macht und dort viel gespielt wird, wollen meistens auch viele andere Kinder der Klasse in die Förderung.

Wenn also ein Kind nicht gefördert werden will, lassen Sie es. Vielleicht will es in einem halben Jahr und hört von anderen Kindern, wie schön die Förderung ist.

7.4 Fragen und Antworten

Kinder stellen idR. in der Förderung zwei Arten von Fragen: Fragen nach den verwendeten Symbolen und der mathematischen Schreibweise sowie Verständnisfragen.

Fragen ersterer Art sollten geduldig und vollständig beantwortet werden, denn diese Fragen kann das Kind sich nur in seltenen Fällen selbst beantworten oder nach der Antwort forschen. So muss auf eine dementsprechende Frage nach dem waagerechten Strich geantwortet werden, dass dieser in der Mathematik als Kürzel für die Subtraktion stehen kann (er kann auch ein Bruchstrich sein). Diese Art von Fragen sind jedoch sehr selten.

Die meisten Fragen sind Verständnisfragen und diese Fragen sind sehr wertvoll, denn sie sind der Ausgangspunkt für die forschende Tätigkeit und zeigen die Neugierde des Kindes. Das Ungünstigste was hier gemacht werden kann, ist die Frage vollständig zu beantworten. Der Forschergeist wird damit quasi totgeschlagen.

Vielmehr kommt es darauf an, dem Kind Mut zu machen, sich auf Entdeckungsreise zu begeben.

Als Erstes wäre abzuwägen, ob überhaupt geantwortet werden muss. Manchmal reden Kinder vor sich hin und formulieren Fragen laut, die Ihnen durch den Kopf gehen und mit denen sie sich beschäftigen. Das ist aber nicht als Aufforderung an den Förderlehrer gedacht, eine Antwort zu geben. Daher tut es manchmal gut, inne zu halten und abzuwarten.

Sollte doch eine Antwort erwünscht sein, so kommen Sie dem Kind etwas entgegen, aber lassen Sie genug Platz für die forschende Tätigkeit des Kindes.

Lassen Sie das Terrain, das zwischen der Frage und ihrer Antwort erforscht werden kann, entstehen. Vielleicht genügt es, Material zu reichen, mit dem das Kind weiterforschen kann, wie z.B. einen Würfel, Dines-Material oder ähnliches.

Tauscht z.B. beim Spiel „Zehn gewinnt“ die Frage auf, „wie legt man eine Sieben?“, könnten Sie ohne Kommentar das Blatt „Diese Spielergebnisse sind möglich“ reichen. Oder Sie könnten auf das Spielfeld zeigen und sagen; „Schau mal, da hast du schon fünf“. Lassen Sie nach einer solchen Hilfestellung dem Kind ausreichend Zeit, um den Prozess zu verarbeiten.

Fragen sie eventuell nach, ob das Kind noch mehr Zeit zum Nachdenken braucht und ob das Gesagte eine Hilfestellung für das Kind war.

7.5 Reden und Schweigen

Lehrer reden sehr viel und sie merken es meist nicht. Das gilt auch für Förderlehrer. Daher gilt: Reden Sie so wenig wie nur irgend möglich. Das gilt natürlich nur für mathematische Sachverhalte. Wenn Sie gerade dabei sind, Witze zu erzählen oder „Tiere nachmachen“ spielen, lassen Sie einfach los! In der mathematischen Fördersituation sollten Sie, bevor Sie reden, genau überlegen, ob das, was Sie sagen wollen wirklich notwendig ist und unbedingt gesagt werden muss. Geht es auch ohne? Kann vielleicht auch stumm Material gereicht werden, mit dessen Hilfe das Kind sich selber hilft? Wenn nicht und Sie der Meinung sind, dass Sie unbedingt etwas sagen müssen, dann beschränken Sie sich auf maximal drei Sätze und warten dann ab was passiert. Fast immer reichen maximal drei Sätze und fast immer reden Lehrer mehr als drei Sätze, obwohl drei gereicht hätten (ich rede da aus eigener Erfahrung).

Diese Ratschläge klingen vielleicht schwerer zu befolgen als man denkt, doch Schweigen und sich Kurzfassen ist für Lehrer und Förderlehrer einfach zu erlernen, wenn Sie inne halten und sich fragen: „Wie kann ich mit nur einem Satz antworten?“

7.6 Die ersten Stunden

Die ersten drei Förderstunden sind von besonderer Bedeutung. Hier wird die Fördersituation emotional geprägt, d.h. ob das Kind die Fördersituation zukünftig als positiv erleben wird oder nicht. Daher steht in diesen Förderstunden nicht das Lernen an erster Stelle, sondern das gegenseitige Kennen lernen und das positive Erlebnis. Das heißt nicht, dass Sie nicht Mathematik betreiben sollten, im Gegenteil, aber es sollte stets viel Zeit für das Miteinander bleiben: für den Spaß, für Gespräche über Erlebtes, Belastendes und Erfreuliches. Das gilt auch für den Förderlehrer, doch der Raum sollte vor allem für das Kind da sein. Lassen Sie sich erzählen wie der Mathematikunterricht empfunden wird, wie das Kind mit Hausaufgaben zurechtkommt, ob es Freunde hat. Betonen Sie den Spielcharakter der Spiele.

7.7 Mathematik und Sprache

Mathematisches Lernen erfordert Versprachlichung. Kinder sollten angeregt werden ihr Handeln sprachlich zu begleiten und Entdeckungen sprachlich zu formulieren. Das ist für viele Kinder sehr schwer, sie benötigen dafür Zeit, Geduld und vielleicht Unterstützung.

Wichtig ist auch die Interpretation der Spielhandlungen mit mathematischen Symbolen. Z.B. wird das Hinzufügen als Addition und das Entfernen als Subtraktion mit den entsprechenden Symbolen der Mathematik interpretiert. Chips, Holzwürfel und ähnliches werden auf ihre Anzahl (und nicht auf ihr Aussehen) reduziert und als Zahl notiert bzw. benannt. Letztlich werden alle Spielhandlungen mit Hilfe von Zahlen und Rechenoperationen notiert, bzw. mathematisch interpretiert.

Die in der Förderbox präsentierten Lernspiele lösen nur einen mathematischen Lerneffekt aus, wenn sie sprachlich – mündlich oder schriftlich, aktiv oder passiv (zuhören) – begleitet werden. Geschieht dies nicht, so kann es durchaus sein, dass Kinder zwar viel Spaß haben, aber kein mathematischer Lerneffekt eintritt. Daher empfehle ich nach der ersten oder zweiten Spielrunde Stift und Papier hervor zu holen und von jedem Spielzug ein Protokoll zu führen. Dieses Protokoll wird ausschließlich mit mathematischen Symbolen (Zahlen und Rechenoperationen) geschrieben. Sollte ein Kind nicht schreiben wollen, so können Sie das Schreiben übernehmen, aber lassen Sie sich vom Kind diktieren was Sie schreiben sollen. Dies gilt grundsätzlich für alle Spiele. Ausnahmen sind Spiele, die bereits mit Zahlen gespielt werden, wie Plusminus, Räum ab, 100Feld, Nummero, 500 gewinnt und Die größte Zahl.

Kapitel 8. Diagnose

Die Beschreibung der Diagnostik erfolgt in Anlehnung an Wehrmann (2003).

Die hier vorgestellte Diagnose hat nicht den Anspruch, das Vorliegen einer Rechenschwäche oder gar einer Dyskalkulie zu belegen.

Es soll lediglich festgestellt werden, welche mathematisch-inhaltlichen Bereiche noch erarbeitet werden müssen. Insofern handelt es sich um eine Förderdiagnostik.

Diagnostik wie sie hier verstanden wird, legt den Schwerpunkt auf die mathematischen Inhalte, ist jedoch eine Gesamtschau des Kindes. Konzentrationsfähigkeit, Selbstbewusstsein, Selbstwirksamkeit , sekundäre Problematik usw. sind wichtige Aspekte der Diagnostik.

Dementsprechend kann die Förderung auf diese nicht-mathematischen Aspekte ausgerichtet sein, jedoch nie von den mathematischen Inhalten abgelöst.

Es bleibt dabei, dass es sich hier um eine mathematische Förderung handelt: Kinder, die nicht Rechnen können, müssen Rechnen lernen.

Die weiter unten vorgestellten Fragen geben keinen Aufschluss über den Lernstand des Kindes. Sie geben lediglich einen Hinweis und eine Vermutung auf den Inhaltsbereich, der in die Förderung einbezogen werden soll. Während der Förderung erfolgt ein ständiger Abgleich mit den Ergebnissen der Diagnose. Sie werden feststellen, dass sie nach einer gewissen Zeit ein immer besseres Bild dessen bekommen, was dem Kind fehlt.

Erläutern Sie dem Kind, dass dies keine Prüfung ist und die Ergebnisse in keiner Weise bewertet werden. Erläutern Sie auch, dass bei den folgenden Fragen die Ergebnisse keine Rolle spielen, sondern, dass Sie wissen wollen was es sich bei der Lösung der Aufgaben denkt.

Wir möchten nur wissen, wie das Kind gerechnet hat. Nach langer Schulfrustration haben Kinder oftmals Angst vor den Fragen Erwachsener entwickelt, vor allem vor deren Bewertung.

Mit dieser Diagnose soll festgestellt werden, ob die in dieser Förderbox Addition und Subtraktion thematisierten Konzepte

1. der Menge und

2. der Bündelung

vom Kind bereits beherrscht werden oder noch gelernt werden müssen.

Bedenken Sie, dass es auch sein kann, dass die Diagnose kein eindeutiges Ergebnis hergibt. Manche Kinder geben nur unwillig Auskunft und sind mit ihren Antworten sehr kurz angebunden. Das muss respektiert werden. Hier bleibt nichts anderes übrig, als eine begleitende Diagnostik zu machen, d.h. wir fangen einfach an und versuchen eine entspannte Atmosphäre herzustellen. Vielleicht können wir unsere Fragen später stellen. Vielleicht besteht unsere Aufgabe vor allem darin, die Angst vor der Mathematik oder vor dem Lehrer zu nehmen. Letztlich sind wir auf die Mitwirkung des Kindes angewiesen, und seine Weigerung wird einen Hintergrund haben, den wir nicht kennen und respektieren müssen.

8.1 Diagnose des Konzepts der Menge

Mit folgenden Fragen soll festegestellt werden, ob ein Kind zählend rechnet oder mit Mengen in der Vorstellung rechnet (Konzept 1).

Diagnostische Frage zur Addition:

„Rechne bitte die Aufgabe 5+3 im Kopf. Sag mir vor allem, wie du das gerechnet hast." Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?"

Wenn das Kind nun antwortet, beachten Sie die Antwort nicht, auch wenn sie richtig ist. Die Antwort ist für uns nicht von Interesse, da sie keinen Aufschluss über die Fähigkeiten des Kindes gibt (bedenken Sie: Die Antwort könnte geraten und rein zufällig richtig sein).

Mögliche Antworten:

1. Einige Kinder schießen mit der Antwort sofort heraus. Dies kann bedeuten, dass

- sie tatsächlich gute Rechner sind. Es kann aber auch bedeuten, dass

- sie die Aufgaben alle auswendig gelernt haben und keine Kenntnis des Rechnens mit Mengen vorliegen. Fragen Sie nach.

2. Andere Kinder brauchen relativ lange und zählen offen oder verdeckt.

Das verdeckte Zählen erfolgt, indem die Hände unter dem Tisch gehalten werden, indem die Finger beim Zählen kaum oder nicht bewegt werden, durch Kopfnicken oder für uns unsichtbar in der Vorstellung. Fragen Sie nach und erlauben Sie dem Kind das Zählen und sagen Sie es ihm: „Zählen ist erlaubt“ In der Förderung ist Zählen grundsätzlich immer erlaubt (!). Sagen Sie das dem Kind ebenfalls, damit es seine Angst verliert.

Zählendes Rechnen beansprucht das Arbeitsgedächtnis sehr stark. Daher kommt es bei zählenden Rechnern häufig vor, dass sie die Aufgabe vergessen und nachfragen. Wird die Frage mehrmals nachgefragt, so ist das ein Verdacht auf zählendes Rechnen.

Zählende Rechner machen den für sie typischen Einserfehler: Ihr Ergebnis liegt um Eins unter dem richtigen Ergebnis (bei der Addition) oder um Eins darüber (bei der Subtraktion). Das Problem für sie liegt darin, dass sie nicht wissen, ob sie bei der obigen Addition (5 + 3) bei Fünf oder bei Sechs anfangen sollen zu zählen.

Hier noch zwei Aufgaben mit Unbekannten, die das Diagnoseergebnis genauer bestimmen helfen. Die folgenden beiden Aufgaben werden schriftlich vorgelegt.

Diagnostische Aufgabe a: ☐ + 6=9

Diagnostische Aufgabe b: 10=8 + ☐

Nachdem die Lösung notiert wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Das Kind muss für die Ermittlung der fehlenden Zahl eine Mengenvorstellung haben und den Zahlvergleich beherrschen.

Diagnostische Frage zur Subtraktion

„Rechne bitte die Aufgabe 8-7 im Kopf. Sag mir vor allem, <u>wie</u> du das gerechnet hast.“ Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Die Subtraktion ist für zählende Rechner sehr mühsam, denn sie müssen zur Ergebnisfindung rückwärts zählen. Es gibt daher Kinder, die die Subtraktion grundsätzlich ablehnen („kann ich nicht“). Das ist ein starker Verdacht für zählendes Rechnen. Andere Kinder machen sich auf den beschwerlichen Weg von Acht um sieben Schritte rückwärts zu zählen. Achten Sie auf den Einser-Fehler (s.o.).

Hier noch zwei Aufgaben mit Unbekannten, die das Diagnoseergebnis genauer bestimmen helfen. Die folgenden beiden Aufgaben werden schriftlich vorgelegt.

Diagnostische Aufgabe c: ☐ - 4=5

Diagnostische Aufgabe d: 3=7 - ☐

Nachdem die Lösung notiert wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Diese Aufgaben sind für die meisten Kinder sehr schwer. Hier wird die Vorstellung von der Subtraktion als Differenz diagnostiziert. (Aufgabe c: 5 ist die Differenz von 9 und 5; Aufgabe d: 3 ist die Differenz von 7 und 4). Wie bereits oben dargestellt, (Kapitel 2.4) verfügen nur wenige Kinder über eine solche Vorstellung. Diese Vorstellung wird in dem Spiel „Zauberzahl“ gelernt.

Wenn sich durch die Diagnose der Verdacht ergibt, dass ein Kind nicht mit Mengen rechnet sondern zählt, so ist es angebracht die Förderung mit den Spielen Eins bis

Vierzehn durch zu führen. Beginnen Sie mit dem Spiel „Zehn gewinnt“ und fahren fort bis zum Spiel „Räum ab!“ . Gleichen Sie das Ergebnis der Diagnose mit ihren Erfahrungen während der Förderung ab. Bestätigt sich in der Förderung ihr Verdacht oder nicht?

8.2 Diagnose des Konzepts der Bündelung

Mit folgenden Fragen soll festgestellt werden, ob ein Kind das Konzept der Bündelung zum Rechnen nutzt.

Diagnostische Frage 1

„Du hast vorhin herausbekommen, dass 5+3 8 ergibt. Wie viel ergibt 15+3?“ Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Hier gibt es zwei häufig vorkommende Antworttypen: Einige Kinder zählen von 15 um drei weiter. Sie haben die dekadische Struktur des Zahlenraums, der auf der Bündelung basiert, nicht verstanden.

Andere Kinder gehen sehr mechanisch vor: Sie verdecken (im Geiste oder real) die Eins vor der Fünf, rechnen dann 5+3 und setzen vor das Ergebnis wieder die Eins.. Dieses mechanische Vorgehen nährt den Verdacht, dass hier kein Wissen vorliegt, sondern ein algorithmisches bzw. mechanisches Ermitteln der Lösung. Diese Lösungstechnik führt jedoch letztlich zum Scheitern, z.B. bei der Aufgabe 18+3. Vor allem wird hier keine abstrakte Struktur aufgebaut, die für den großen Zahlenraum als Grundlage dient.

Diagnostische Frage 2

„Du hast vorhin herausbekommen, dass 5+3 8 ergibt. Wie viel ergibt 50+30?“ Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Hier gibt es nur eine Antwort, die auf ein Unverständnis des Konzepts der Bündelung hinweist: Kinder sagen oft, dass sie die Nullen wegnehmen, dann 5+3 rechnen und dann wieder eine Null hinzufügen. Auf die Frage, wo denn die zweite Null geblieben ist, wissen sie oftmals keine Antwort. Hier steht der Verdacht im Raume, dass mechanisch und unverstanden vorgegangen wird.

Die Variante, dass ein Kind um dreißig Schritte vorwärts zählt, um das Ergebnis zu ermitteln habe ich noch nie erlebt.

Sollten Fragen 1 und 2 positiv ausgefallen sein, so können Sie sich ein genaueres Bild machen, indem Sie noch folgende Fragen stellen.

Diagnostische Frage 3

„Rechne bitte die Aufgabe 46+38 im Kopf. Sag mir vor allem, <u>wie</u> du das gerechnet hast.“ Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Diagnostische Frage 4

„Rechne bitte die Aufgabe 73-27 im Kopf. Sag mir vor allem, <u>wie</u> du das gerechnet hast.“ Nachdem die Lösung genannt wurde, fragen Sie nach: „Wie hast du das gerechnet?“

Legt ein Kind bei beiden Fragen nachvollziehbare und begründete Antworten vor, so gehen wir davon aus, dass das Konzept der Bündelung bekannt ist.

Ergeben die Fragen den Verdacht, dass das Konzept der Bündelung nicht bekannt ist, so sollten Sie das Spiel „20 gewinnt“ spielen. Anschließend spielen Sie die Spiele 17 bis 29. Natürlich müssen Sie nicht alle Spiele spielen und vor allem nicht alle gleich intensiv. Schauen Sie, welche Spiele schnell langweilig werden und wo sich Möglichkeiten der Erweiterung des mathematischen Wissens auftun.

Teil II: Die Spielanleitungen

In diesem Kapitel sind die Spielanleitungen zu den oben beschriebenen Lernspielen enthalten.

Zu den Lernspielen finden Sie alle Spielfelder, Spielkarten, Dominos und weiteres Material in der Förderbox. In den Spielanleitungen ist nur ein Teil der Materialien abgebildet. Siehe mehr dazu im Anhang.

Übersicht der Lernspiele

1. **Zehn Gewinnt:** Durch dieses Spiel bekommen Kinder eine Vorstellung von den Zahlen im Zahlenraum bis Zehn. Die hier gewählte Veranschaulichung mit der doppelten Würfelfünf ist besonders für zählende Rechner geeignet.
2. **Hüpf die Zahl:** Bewegungsspiel zu den Inhalten von „Zehn gewinnt“
3. **Zehn gewinnt Domino:** Ein Domino mit Zahlen und Punktemustern im Zahlenraum bis zehn
4. **Lückenfüller:** Anschaulich wird bei diesem Spiel die Zehnerergänzung gelernt.
5. **Zehn raus:** Übung der Zehnerergänzung nur mit Zahlen (symbolische Ebene)
6. **Zahlenwippe:** Die Fünferbündelung, auch als „Kraft der Fünf“ bezeichnet, wird in diesem Spiel gelernt. Zusätzlich ist haptisches Material zur Verinnerlichung enthalten.
7. **Zahlgefühl:** Die fünferbündelung mit haptischem Material (Fühlekarten)
8. **Würfelschranke:** Das in den Spielen „Zehn gewinnt“ und „Zahlenwippe“ eingeführte Muster wird hier fortgeführt und zur Veranschaulichung von Addition und Subtraktion verwendet.
9. **Würfelschranke Domino:** Addieren und Subtrahieren mit Zahlen und Punktemustern.
10. **Würfelbingo:** Üben und Automatisieren der Addition und Subtraktion.
11. **Zauberzahl:** Eine wichtige Vorstellung der Subtraktion ist die Differenz. Dies wird mit diesem Spiel gelernt.
12. **Gefangene befreien:** Üben der Differenz nur mit Zahlen
13. **Trimon:** Dieses Spiel übt das Erkennen von Mengen und Differenzen in einer zweifarbigen Reihe von Punkten.
14. **Plusminus Bingo:** Ermitteln von Leerstellen in einer Addition oder Subtraktion („Kästchenrechnen“).
15. **Räum ab!** Dieses Spiel übt die Zahlzerlegung im Zahlenraum bis zehn.
16. **Zwanzig gewinnt:** Dieses Spiel führt in die Zehnerbündelung ein und bereitet so auf das Stellenwertsystem vor.
17. **Zahlenhüpfer:** Dieses Spiel widmet sich der Übertragung des „kleinen 1+1“ in den Hunderterraum, vorerst ohne Zehnerübergang.
18. **Triolett:** Dieses Kartenspiel thematisiert Übertragungsaufgaben im Zahlenraum bis Hundert.

19. **Such die Zahl:** Strukturierte und systematische Suche von Zahlen auf dem 100er Feld. Einführung ins dekadische Zahlensystem.
20. **Zahlenklatschen:** Vertiefung der Struktur des 100er Feldes.
21. **Zahlenpuzzle:** 100 Spielsteine werden zu einem Hunderterfeld zusammengefügt.
22. **Nummero:** Die im vorherigen Spiel erworbenen Kenntnisse des 100er-Feldes werden hier vertieft. Jeder Spieler sucht eine ihm unbekannte Zahl auf dem 100er-Feld. Dies ist eines der beliebtesten Spiele bei den älteren Kindern.
23. **Rattenwerfen:** Wirf die Ratte und addiere und subtrahiere im Zahlenraum bis Hundert und bis Tausend. Kinder lieben dieses Spiel wegen der süßen Plüschratten.
24. **Zahlenschlange:** Differenzen im Zahlenraum bis Hundert.
25. **Der Turm:** Die hier gelernte Technik des Zehnerübergangs enthält zwei Schritte: 1. Den Zehner auffüllen und 2. den verbliebenen Rest hinzufügen. Diese beiden Schritte werden hier geübt. Ein Spiel, das eine ruhige Hand braucht.
26. **Turmdomino:** Die im vorherigen Spiel erworbenen Kenntnisse werden zum Rechnen von Aufgaben mit Zehnerübergang angewendet.
27. **Kisten:** Das Rechnen im Hunderterraum mit Zehnerübergang ist Thema dieses Spiels.
28. **500 gewinnt:** Ein Spiel zur Einführung des Stellenwertsystems.
29. **Die größte Zahl:** Dieses sehr unterhaltsame Spiel befasst sich mit dem Stellenwertsystem für drei- bis elfstellige Zahlen.

Literatur

Arndt, Dominique; Ehlert, Antje; Fritz, Annemarie; Leutner, Detlev (2013) Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern, in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 34(2), S. 237-263.

Bernstein, Basil (2012): Vertikaler und horizontaler Diskurs: Ein Essay. In: U. Gellert und M. Sertl (Hrsg.*) Zur Soziologie des Unterrichts. Arbeiten mit Basil Bernsteins Theorie des pädagogischen Diskurses.* (S. 63-87). Weinheim, Beltz-Juventa

Benz, Christiane (2007) Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE+-ZE im Verlauf es zweiten Schuljahres. In: *Journal für Mathematikdidaktik,* 28(1), S. 49-73.

Bourdieu, P und J. C. Passeron (1996) *Reflexive Anthropologie*. Frankfurt am Main.: Suhrkamp

Bourne, Jill (2012) Vertikaler Diskurs. Die Rolle des Lehrers bei der Übermittlung und Aneignung von dekontextualisierter Sprache. In: U. Gellert und M. Sertl (Hrsg.*), Zur Soziologie des Unterrichts. Arbeiten mit Basil Bernsteins Theorie des pädagogischen Diskurses.* (S. 191-222). Weinheim, Beltz-Juventa

Eichler, Klaus-Peter; Grassmann, Marianne; Mirwald, Elke; Nitsch, Bianca (2010) Mathematikunterricht. In: Astrid Kaiser und Susanne Miller (Hrsg.), *Kompetent im Unterricht der Grundschule, Band 5.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren,

Fingerhut, Ralf; Manske, Christel (1984) *Ich war behindert anhand der Lehrer und Ärzte, Protokoll einer Heilung.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag,

Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi (2008) *Rechenschwäche.* München, Basel: Ernst Reinhardt Verlag,

Gerster, Hans-Dieter; Schultz, Rita (2004) *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht, Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Freiburg: Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.

Gellert, Uwe und Straehler-Pohl, Hauke (2012) Klassifikation. Facetten eines für die Unterrichtsforschung zentralen Begriffs In: U. Gellert und M. Sertl (Hrsg.), *Zur Soziologie des Unterrichts. Arbeiten mit Basil Bernsteins Theorie des pädagogischen Diskurses.* (S. 89-118). Weinheim: Beltz-Juventa.

Hasan, R (2001) The ontogenesis of decontextualised Language, Some achievements of classification and framing. In: A. Morais, B. Davies und H. Daniels (Hrsg.), *Towards a sociology of pedagogy: The contribution of Basil Bernstein to research* (S. 47-79). New York: Peter Lang.

Hasemann, Klaus (2003) *Anfangsunterricht Mathematik.* Heidelberg Berlin: Spektrum Verlag

Lerman, Stephen und Zevenbergen, Robyn (2004) The socio-political context of the mathematics classroom. Using Bernstein´s theoretical framework to understand classroom communication. In: Paola Valero und Robyn Zevenbergen (Hrsg.), *Researching the socio-political Dimensions of mathematical education. Issues of power in theory and methodology.* (S. 27-42) Dordrecht: Kluwer acadamic publishers.

Meyerhöfer, Wolfram (2011) Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). In: *Pädagogische Rundschau.* 65(4), 401-426.

Wehrmann, Michael (2003) Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik. Berlin: Verlag Dr. Köster,