»Something is rotten in the state of Denmark« – Reflexionen zum Begründungsproblem der vollständigen Induktion [Vortragsmanuskript]

Conference Paper · January 2020

Felix Lensing
Freie Universität Berlin

Manuskript

Felix LENSING, Berlin

»Something is rotten in the state of Denmark« – Reflexionen zum Begründungsproblem der vollständigen Induktion

1. Einleitung

Der Titel meines Vortrags lautet „Something is rotten in the state of Denmark" – Reflexionen zum Begründungsproblem der vollständigen Induktion. Mein Vortrag gliedert sich in vier Abschnitte:

1) Rekonstruktion des Begründungsproblems
2) Drei Lösungen des Begründungsproblems und das Problem der drei Lösungen
3) Wittgensteins Auffassung der vollständigen Induktion
4) Mathematikdidaktische Konsequenzen

Um mich dem Begründungsproblem der vollständigen Induktion anzunähern, möchte ich zunächst eine andere Frage stellen:

2. Welches Problem löst die vollständige Induktion?

Eine erste Antwort auf diese Frage lautet: Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, mit dem die Allgemeingültigkeit einer Aussageform in den natürlichen Zahlen begründet werden kann. Sie löst das Problem, wovon wir eigentlich sprechen, wenn wir sagen, dass etwas ›für alle natürlichen Zahlen‹ gilt.

Aber warum ist das ein Problem? Genauer gefragt:

(1) Was ist problematisch daran, von einer Aussageform zu sprechen, die für allen natürlichen Zahlen gilt? Und weiter:

(2) Wie löst die vollständige Induktion dieses Problem?

Zu (1): In einem endlichen Gegenstandsbereich, zum Beispiel der Menge der Personen in einem Raum, ist die Prüfung der Gültigkeit einer All-Aussage unproblematisch: Ob alle Personen in einem Raum einen Schal tragen, lässt sich dadurch überprüfen, dass jede einzelne Person darauf untersucht wird, ob er bzw. sie einen Schal trägt oder nicht. ›Alle Personen im Raum tragen einen Schal‹ bedeutet ›Person 1 trägt einen Schal *und* Person 2 trägt einen Schal *und* Person 3 trägt einen Schal usw.‹. Zur Verifikation wird die All-Aussage in eine Konjunktion von endlich vielen Teilaussagen zerlegt.

Aber was bedeutet eine All-Aussage in den natürlichen Zahlen wie zum Beispiel ›$\forall n \epsilon \mathbb{N}: 3 + n \neq 2$‹? Man wird vielleicht antworten, dass sie einfach ›$(3 + 1 \neq 2) \wedge (3 + 2 \neq 2) \wedge (3 + 3 \neq 2)$ usw.‹ bedeutet. Hier ergibt sich jedoch eine Schwierigkeit, denn die drei Punkte können nicht einfach durch eine vollständige Auflistung aller Teilaussagen ersetzt werden.

Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, würde die Konjunktion auch unendlich viele Glieder umfassen. Das obige Verifikationsverfahren fällt damit offenbar als Alternative aus, denn dazu wären unendlich viele Verifikationsschritte nötig. Damit ergibt sich die folgende Präzisierung des Problems:

Wie kann die Allgemeingültigkeit einer Aussageform in den natürlichen Zahlen in endlich vielen Schritten verifiziert werden?

Da nun klarer herausgearbeitet wurde, wo eigentlich das Problem liegt, können wir nun fragen: Wie löst die vollständige Induktion dieses Problem?

Durch vollständige Induktion wird eine All-Aussage (›$\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$‹) begründet, indem die Wahrheit von zwei anderen Aussagen nachgewiesen wird. Zunächst wird gezeigt, dass die Aussageform $A(n)$ für $n = 1$ in eine wahre Aussage übergeht (*Induktionsanfang*). Dann wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass die Aussageform für eine bestimmte natürliche Zahl $n = k$ gilt, sie auch für ihren Nachfolger $k + 1$ gültig ist (*Induktionsschritt*). Aus diesen beiden Prämissen wird dann geschlossen, dass die zugehörige All-Aussage wahr ist (*Induktionsschluss*).

Der Beweis durch vollständige Induktion hat damit die Form:

(IA) und (IS) sind wahr, *also* ist die zugehörige All-Aussage wahr.

Das Besondere am Induktionsbeweis im Vergleich zu anderen Beweisformen ist also, dass die zu beweisende All-Aussage im Beweis selbst überhaupt nicht vorkommt. Der Schluss auf die All-Aussage wird gewissermaßen am Ende des Beweises noch hinzugefügt, obwohl alles, was begründet wurde, eigentlich nur die Wahrheit der Aussagen (IA) und (IS) ist.

Damit sind wir zum Begründungsproblem der vollständigen Induktion vorgedrungen:

Wie kann dieser Schluss auf die All-Aussage gerechtfertigt werden?

Die Standardargumentation, die sich zum Beispiel auch bei Arnold Kirsch (1994, S. 153f.) in seinem Buch *Mathematik wirklich verstehen* finden lässt, kann wie folgt rekonstruiert werden: Durch das Zusammenspiel von (IA) und (IS) mit der logischen Schlussregel *Modus ponens* schreitet die Verifikation unaufhaltsam von einer natürlichen Zahl zur nächsten, bis die Aussageform schließlich für alle natürlichen Zahlen verifiziert worden ist. Nach (IA) gilt die Aussageform für die Zahl 1. Eine erste Anwendung von (IS) liefert: Wenn die Aussageform für 1 gilt, dann gilt sie auch für 2. Also gilt sie für die Zahl 2. Und wieder nach (IS): Wenn sie für 2 gilt, so gilt sie auch für 3. Also gilt sie für die Zahl 3 usw. (bis schließlich alle natürlichen Zahlen erreicht sind). »Auf eine weitergehende *Begründung* des

Verfahrens«, so resümiert Kirsch (1994) diese Argumentation, »kann hiernach verzichtet werden« (S. 154).

Aber welcher Sinn verbirgt sich hier hinter den drei Punkten ›...‹? Das Verifikationsverfahren ist ja nur dann durchführbar, wenn die drei Punkte durch eine endliche Anzahl von logischen Schritten ersetzt werden kann. Nun ist es zwar richtig, dass die Aussageform für jede natürliche Zahl, wie groß auch immer diese Zahl gewählt wird, in endlichen vielen Schritten verifiziert werden kann, aber daraus folgt keineswegs bereits, dass die Aussageform *deshalb* auch für alle natürlichen Zahlen gültig sein muss. Für diesen Schluss auf die All-Aussage bedürfte es nämlich einer »unendlichen Anzahl von Syllogismen« (Poincaré, 1914, S. 13).

In den Worten Ludwig Wittgensteins: »Den Satz, der von allen Zahlen handelt, kann man sich nicht durch ein endloses Schreiten verifiziert denken, denn, wenn das Schreiten endlos ist, so führt es ja eben nicht zu einem Ziel. Denken wir uns eine unendlich lange Baumreihe, und ihr entlang, damit wir sie inspizieren können, einen Weg. Sehr gut, so muß dieser Weg endlos sein. Aber wenn er endlos ist, so heißt das, daß man ihn nicht zu Ende gehen kann. D. h., er bringt mich *nicht* dazu, die Reihe zu übersehen. Der endlose Weg hat nämlich nicht ein ›unendliches fernes‹ Ende, sondern kein Ende. [E]in sukzessives Erfassen ist schon möglich, nur führt es eben nicht zur Gesamtheit. Diese liegt: *nicht* auf dem Weg, den wir schrittweise gehen, – und nicht: am unendlichen fernen Ende dieses Weges« (Wittgenstein, 1978, S. 456).

Als Zwischenresümee kann damit festgehalten werden: Die beiden Prämissen (IA) und (IS) liefern keine ausreichende Basis, um die Gültigkeit der zugehörigen All-Aussage allein mit Hilfe der Schlussregeln der formalen Logik abzuleiten.

Aber wie kann der Sprung über den Abgrund, der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen, denn dann bewerkstelligt werden?

Im Folgenden werde ich kurz drei Lösungen des Problems gegenüberstellen, die mit den Namen Peano, Dedekind und Poincaré assoziiert werden können.

Lösung 1: Eine Möglichkeit besteht darin, dass ein Axiom eingeführt wird, welches die Gültigkeit des Induktionsschlusses sicherstellt. Diesen Weg ist Guiseppe Peano gegangen. Im fünften Peano-Axiom heißt es: Jede Menge M von natürlichen Zahlen ($M \subseteq \mathbb{N}$), die (1) die Zahl 1 und (2) mit jeder Zahl k auch ihren Nachfolger $k+1$ enthält, entspricht der Menge aller natürlichen Zahlen ($M = \mathbb{N}$). Setzt man dieses Axiom voraus, dann kann der Induktionsschluss leicht ›bewiesen‹ werden. Damit wird der Induktionsschluss in einem logischen Schritt möglich. Die Schwierigkeit dieser Lösung liegt jedoch auf der Hand: Das Begründungsproblem wird ›gelöst‹, indem das, was eigentlich begründet werden soll, einfach axiomatisch eingesetzt wird. Die Frage nach dem Wesen des Induktionsschlusses wird auf diese Weise abgeschnitten. Müssen wir uns damit begnügen oder gibt es vielleicht eine andere Möglichkeit den Induktionsschluss auf ein grundlegenderes Prinzip zurückzuführen?

Lösung 2: Im Vorwort zu seiner berühmten Schrift ›Was sind und was sollen Zahlen?‹ von 1888 gibt Richard Dedekind an, dass ihm genau das gelungen sei. In den Paragrafen 59, 60 und 80 der Schrift sei der »Nachweis [erbracht], daß die unter dem Namen der vollständigen Induktion […] bekannte Beweisart wirklich beweiskräftig ist (Dedekind, 1888, Vorwort). Wie geht Dedekind dabei vor?

Vom heutigen Standpunkt aus würde man sagen, dass Dedekind eine induktive Menge eingeführt hat, eine Menge also, welche 1) die leere Menge als Element enthält und 2) für jedes Element x auch ihren Nachfolger x' enthält. Die kleinste induktive Menge ist dann durch die Schnittmenge aller induktiven Mengen gegeben und von dort aus lässt sich leicht begründen, dass der Induktionsschluss in dieser Menge zulässig ist. Aber woher weiß man eigentlich, dass es überhaupt eine einzige solche Menge geben muss? Dedekind ging noch davon aus, die Existenz einer induktiven Menge beweisen zu können (ebd., §66). Diese Hoffnung hat sich heute als falsch erwiesen. Stattdessen wurde das sogenannte Unendlichkeitsaxiom eingeführt, um die Existenz einer induktiven Menge sicherzustellen. Der Sprung von Endlichen zum Unendlichen wird dadurch bewerkstelligt, dass die Existenz einer unendlichen Menge axiomatisch eingesetzt wird, die *per definitionem* eine Struktur aufweist, auf die das Beweisverfahren der vollständigen Induktion angewendet werden kann. Auch hier gilt also, dass das Begründungsproblem letztlich abgeschnitten wird, indem das, was eigentlich begründet werden soll, in leicht verwandelter Form axiomatisch eingesetzt wird.

Lösung 3: Eine dritte Lösungsmöglichkeit besteht nun darin – und diese Ansicht hat Poincaré (1914, S. 13) und nach ihm auch Felix Klein (1924, S. 12) vertreten –, die Gültigkeit des Induktionsschluss für schlichtweg nicht begründbar zu erklären. Der Induktionsschluss muss als »echt intuitiv« (Klein, 1924, S. 12) hingenommen werden.

Er stellt, so Poincaré, ein Musterbeispiel für ein *synthetisches Urteil a priori* (im Kantischen Sinne) dar (vgl. Poincaré, 1914, S. 13). Der Induktionsschluss ist *a priori*, denn die Erfahrung scheitert am Sprung vom Endlichen zum Unendlichen (wir können niemals alle natürlichen Zahlen überschauen!); das Urteil ist aber weiterhin auch *synthetisch*, da es nicht mit Hilfe der Schlussregeln der formalen Logik abgeleitet werden kann. Der Schluss zwingt sich uns für Poincaré mit Notwendigkeit auf, da er »nur die Bestätigung einer Eigenschaft unseres Verstandes« (S. 13) darstellt.

Diese Position hat nun einerseits den Vorteil, dass sie den Induktionsschluss tatsächlich auf etwas Grundlegenderes, nämlich auf die reine Form unseres Verstandes, zurückführt, sie hat jedoch andererseits auch den Nachteil, dass man damit in einen Bereich vorstößt, der sich jeder Begründbarkeit entzieht.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass das Begründungsproblem, also der Versuch, die Gültigkeit des Induktionsschlusses zu rechtfertigen, letztlich in allen drei

Lösungen umgangen wird, indem implizit oder explizit etwas vorausgesetzt wird, was letztlich nichts anderes ist, als eben dieser Übergang selbst.

Kurz gesagt: *Alle drei Problemlösungen führen dazu, dass das Problem in seiner eigenen Lösung durch die Hintertür zurückkehrt.*

Wir wollen uns daher einer alten Heuristik zur Lösung unlösbarer Probleme bedienen, die der Kybernetiker Gotthard Günther einmal sehr klar formuliert hat: »Wenn ein Problem wieder und wieder auftaucht und keine Lösung gefunden werden kann, dann sollte man nicht danach fragen, was die Vertreter gegensätzlicher Standpunkte voneinander unterscheidet, sondern was sie gemeinsam haben« (Günther, 1971, S. 6).

Die drei Problemlösungen unterscheiden sich darin, *wie* der Übergang von (IA) und (IS) zur All-Aussage gerechtfertigt wird, aber ihnen allen ist gemeinsam, *dass* sie versuchen, diesen Übergang als logischen Schluss zu rechtfertigen. Sobald diese unhinterfragte Vorannahme jedoch subtrahiert wird, ergibt sich ein neuer Zugang zum Problem. Genauer gesagt: *Es ergibt sich ein neues Problem*.

Und es ist genau an dieser Stelle, an der Wittgenstein seine Überlegungen beginnt. Bisher haben wir die All-Aussage so behandelt, als wenn sie schon für sich genommen einen klar bestimmten Sinn hätte. Jeder Versuch, den Übergang von (IA) und (IS) zur All-Aussage als einen logischen Schluss zu rechtfertigen, setzt ja voraus, dass die All-Aussage auch unabhängig von (IA) und (IS) sinnvoll behauptet werden kann. Aber ist das wirklich der Fall? Was bedeutet denn eine All-Aussage in den natürlichen Zahlen, sobald wir von der vollständigen Induktion absehen?

Da wir die Deutung der Allgemeingültigkeit nicht einfach vom endlichen Fall auf den unendlichen Fall übertragen können, haben wir *vor* dem Beweis durch vollständige Induktion eigentlich noch überhaupt keine Möglichkeit, eine Auskunft darüber zu geben, was es heißt, dass dieses oder jenes ›für alle natürlichen Zahlen‹ gelten soll.

Die vollständige Induktion ist, mit anderen Worten, nicht *eine* neben *anderen* Möglichkeiten, um über die Richtigkeit einer All-Aussage in den natürlichen Zahlen zu entscheiden, sondern sie ist vielmehr das *einzige* Verifikationskriterium, über das wir verfügen (Wittgenstein, 1978, S. 402).

Und es ist diese Einsicht Wittgensteins, die uns dazu zwingt die Formulierung des Begründungsproblems anpassen. Wir fragen nun nicht mehr länger ›Wie kann die Allgemeingültigkeit einer Aussageform in den natürlichen Zahlen durch die vollständige Induktion begründet werden?‹, sondern stattdessen ›Wie wird durch die vollständige Induktion bestimmt, was es heißt, dass eine Aussageform allgemeingültig in den natürlichen Zahlen ist?‹. Durch diese Verschiebung erscheint das Rätsel um den Induktionsschluss in einem neuen Licht.

Aber wie? Wir wollen dazu zunächst eine andere Frage betrachten, die zwar auf den ersten Blick nichts mit der vollständigen Induktion zu tun zu haben scheint, in der jedoch auf den zweiten Blick das Wesen der vollständigen Induktion sehr klar heraustreten wird: Worin besteht die Periodizität des Dezimalbruchs $0,\overline{3}$?

Die Periodizität, so wird man vielleicht sagen, besteht einfach darin, dass die Extension des Dezimalbruchs aus lauter Dreien besteht, das heißt, sie besteht darin, dass *alle* Nachkommastellen des Dezimalbruchs Dreien sind. Aber wie kann man das mit Sicherheit wissen? Die Extension besteht ja schließlich aus unendlich vielen Stellen, sodass eine schrittweise Prüfung nicht in Frage kommt. Man wird antworten, dass es die zugehörige Division, 1 geteilt durch 3, ist, welche uns *zeigt*, dass es so sein muss: Der erste Rest der Division ist gleich dem Dividenden, *also* sind alle Nachkommastellen Dreien. Aber zeigt die Division das wirklich? »Eigentlich nicht, denn jede Rechnung bricht nach endlich vielen Schritten ab; sie könnte allenfalls ergeben, daß die ersten 10, die ersten 20, die ersten 100 Stellen Dreien sind, aber nie, daß *alle* Stellen Dreien sind« (Waismann, 2012, S. 67).

Man sieht bereits, wie sich hier derselbe Problemzusammenhang auftut, mit dem wir uns auch schon bei der vollständigen Induktion herumgeplagt haben. Wir können vermittels unserer Rechnung niemals den Abgrund vom Endlichen zum Unendlichen überspringen, also zu einer Aussage gelangen, die für alle Nachkommastellen gültig ist. Und es ist genau diese Stelle, an der wir den obigen Perspektivwechsel erproben können. Das ganze Problem entsteht nämlich erst dadurch, dass wir die unendliche Extension des Dezimalbruchs als etwas auffassen, dass irgendwie bereits *vor* der Beobachtung existiert, dass der erste Rest der Division gleich dem Dividenden ist. Wenn wir sagen ›Der erste Rest der Division ist gleich dem Dividenden, *also* sind alle Nachkommastellen Dreien‹, so meinen wir damit, dass die Entdeckung der Wiederkehr des Restes lediglich ein *Anzeichen* dafür ist, dass in der unendlichen Extension des Dezimalbruchs eine Regelmäßigkeit *vorhanden* ist. Wenn wir aber sagen ›die Extensionen von $1 \div 3$ sind $0{,}3$, $0{,}33$, $0{,}333$, usw.‹ dann bedeutet das nicht, dass die vierte Extension $0{,}3333$, die fünfte Extension $0{,}33333$ ist und so weiter, sondern was hier ausgedrückt wird, sind in Wahrheit drei Extensionen und eine Regel. Die Entdeckung der Periodizität ist nicht die Entdeckung einer unendlichen Extension, sondern die Entdeckung einer Regel, durch die *der Möglichkeit nach* beliebig viele Nachkommastellen erzeugt werden können. Und erst *durch* diese Regel, die besagt, dass der erste Rest gleich dem Dividenden ist, wird der Aussage, dass es unendlich viele Nachkommastellen gibt, überhaupt ein bestimmter Sinn gegeben: »Der Satz ›die Division wird nach der ersten Stelle periodisch‹ *heißt soviel* wie: ›der erste Rest ist gleich dem Dividenden‹. Oder auch: der Satz ›die Division wird von der ersten Stelle an ins Unendliche die gleiche Ziffer erzeugen‹ *heißt* ›der erste Rest ist gleich dem Dividenden‹« (Wittgenstein, 1978, S. 428)

Nun ist es nicht mehr schwer, diese Einsicht auch auf das Begründungsproblem der vollständigen Induktion zu übertragen: »Wir sagen nicht, daß der Satz $A(x)$, wenn $A(1)$ gilt und aus $A(k)$ $A(k+1)$ folgt, *darum* für alle Kardinalzahlen wahr ist; sondern: ›der Satz $A(x)$ gilt für alle Kardinalzahlen‹ *heißt* ›er gilt für $x = 1$ und $A(k+1)$ folgt aus $A(k)$‹« (Wittgenstein, 1978, S. 406).

Wir geben, der Aussage, die von allen natürlichen Zahlen handelt, also durch die vollständige Induktion überhaupt erst einen bestimmten Sinn. Die All-Aussage *folgt* nicht aus (IA) und (IS) und es handelt sich bei dem Induktionsschluss für Wittgenstein auch nicht, wie Poincaré meinte, um ein synthetisches Urteil a priori.

Der Induktionsschluss ist überhaupt kein logischer Schluss, sondern eine Festsetzung (Waismann, 2012, S. 70), die besagt, dass wir genau dann davon sprechen wollen, dass eine Aussageform für alle natürlichen Zahlen gültig ist, wenn (IA) und (IS) wahr sind.

Durch den Induktionsbeweis wird also überhaupt erst *festgelegt*, wovon wir sprechen, wenn wir im Fall der natürlichen Zahlen von ›für alle‹ sprechen: »Die Induktion«, so Wittgenstein, »ist der Ausdruck für die arithmetische Allgemeinheit« (Wittgenstein, 2015, S. 150). Sie verhält sich zur All-Aussage »nicht wie der Beweis zum Bewiesenen, sondern wie das Bezeichnete zum Zeichen« (ebd., S. 202).

So wie das Zeichen erst durch die Assoziation mit einem Bezeichneten einen bestimmten Sinn erhält, so erhält auch eine All-Aussage in den natürlichen Zahlen erst durch ihre Verbindung mit der vollständigen Induktion einen bestimmten Sinn. Dass jede bestimmte natürliche Zahl in endlich vielen logischen Schritten erreicht werden *kann*, eben darin, in dieser Möglichkeit, liegt das Wesen der Induktion. Und wenn diese unendliche Möglichkeit durch eine Induktion gegeben ist, eben dann sind wir bereit, davon zu sprechen, dass eine Aussageform für alle natürlichen Zahlen gültig ist.

Nun könnte man noch einwenden: ›Wenn es sich bei der vollständigen Induktion um nichts weiter als eine Festsetzung handeln soll, wieso könnte diese Festsetzung denn dann nicht auch ganz anders ausfallen?‹ Dieser Einwand wird jedoch überflüssig, sobald der Zusammenhang mit der Allgemeingültigkeit in endlichen Bereichen in den Blick genommen wird. Die Festsetzung wird auf diese Weise getroffen, da die Gültigkeit von (IA) und (IS) »in einem endlichen Bereich allerdings der Beweis dafür [wäre], daß $A(x)$ für alle Werte von x gilt und *eben das* ist der Grund, warum wir auch im arithmetischen Falle sagen, $A(x)$ gelte für alle Zahlen« (Wittgenstein, 1978, S. 406).

Ich möchte meinen Vortrag mit zwei kurzen didaktischen Bemerkungen abschließen: *Erstens* muss nach dem Gesagten in Frage gestellt werden, ob der sogenannte Induktionsschluss überhaupt etwas ist, dass sich irgendwie ‚einsehen', ‚verstehen' oder auch nur ‚nachvollziehen' lässt. Anders gesagt: Handelt es sich bei dem Induktionsschluss um einen Schluss oder um eine Festsetzung? Wittgenstein würde jedenfalls sagen, dass man das Wesen der Induktion nicht verstehen kann, wenn man sich für ersteres entscheidet. Damit stellt sich dann aber unweigerlich die Frage, wie man denn als Lehrende damit umgehen soll, wenn man es mit einer Lernenden zu tun bekommt, die sich von der Beweiskraft der vollständigen Induktion nicht überzeugen lässt.

Zweitens fällt auf, dass uns die Debatte um den Umgang mit dem Begründungsproblem direkt zur Frage nach dem Wesen des Unendlichen geführt hat.

Reguliert die Induktion das Unendliche, indem sie einzelnen Zahlen ›abläuft‹ und schließlich alle natürlichen Zahlen *wirklich* erreicht haben wird oder liegt das Unendliche vielmehr *in der Möglichkeit*, dass jede bestimmte natürliche Zahl in endlich vielen logischen Schritten erreicht werden *kann*?

Von dieser Opposition ist es dann plötzlich nur noch ein Wimpernschlag und schon landet man beim Grenzwertbegriff, in der Analysis und schließlich bei der Frage nach dem Wesen des Allgemeinen schlechthin. In den Worten Poincarés:

„In diesem Gebiete der Arithmetik kann man meinen, von der Infinitesimal-Rechnung weit entfernt zu sein; und dennoch spielt […] die Idee des mathematischen Unendlich schon eine entscheidende Rolle, und ohne sie würde es keine Wissenschaft geben, weil es nichts Allgemeines geben würde.“ (Poincaré, 1914, S. 12)

Literatur

Dedekind, R. (1924). *Was sind und was sollen Zahlen?*. Wiesbaden: Vieweg.

Kirsch, A. (1994). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis-Verlag.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Erster Band*. Berlin: Springer.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo exposita*. Rom: Fratres Bocca.

Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Hypothese*. Leipzig: Teubner.

Waismann, F. (2012). *Einführung in das mathematische Denken*. Darmstadt: WBG.

Wittgenstein, L. (2015). *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1978). *Philosophische Grammatik*. Frankfurt: Suhrkamp